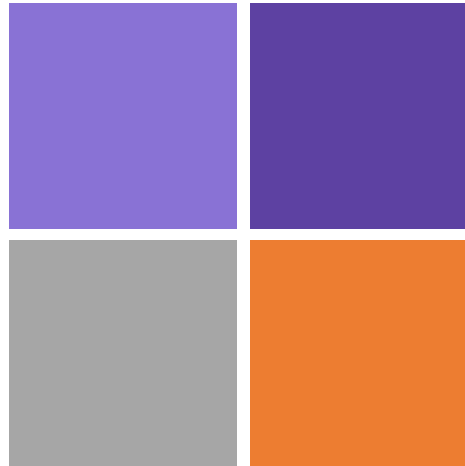


# Semaine 4

## Transformation des contraintes et des déformations relatives



### **Partie I: Propriétés des matériaux**

1. Courbes contrainte – déformation relative
2. Contrainte limite d'élasticité et facteur de sécurité
3. Propriétés
4. Concentration de contraintes

### **Partie II: Transformation**

1. Des états de contrainte dans le plan
2. Contraintes principales et maximales
3. Des états de déformation relative dans le plan
4. Représentation avec le cercle de Mohr
5. En 3D

### **Partie III: Critères de défaillance**

1. Facteur de sécurité
2. Contraintes de Von Mises

# Programme du cours

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
<b>Danick Briand</b>				
1	09.09	1. Intro des <b>3 enseignants</b> 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3
4	30.09	Transformation	x	Série 3
4	02.10	Transformation	x	Série 4
5	07.10	Torsion	x	Série 4
5	09.10	Torsion	x	Série 5
<b>Dimitrios Karampinos</b>				

# Questions ?

## Quiz Session: micro200



- Durant les séances d'exercices en classe
- Par courriel: [danick.briand@epfl.ch](mailto:danick.briand@epfl.ch)

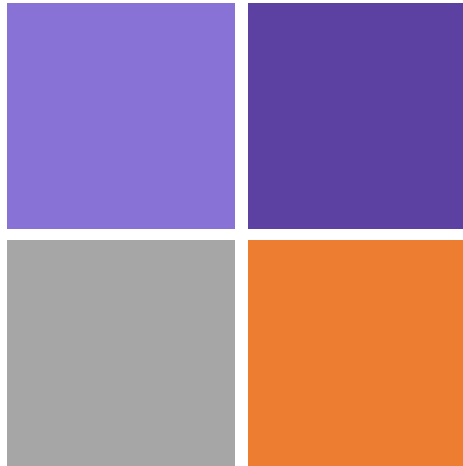
**Déterminer les  
Contraintes maximales dans un  
matériau et identifier leur orientation**

- Déterminer les contraintes normales et de cisaillement selon différentes orientations dans le matériau
- Identifier et positionner les axes principaux
- Calculer les contraintes normales et de cisaillement maximales et leur positionnement
- Définir un facteur de sécurité pour éviter une défaillance

# Semaine 4

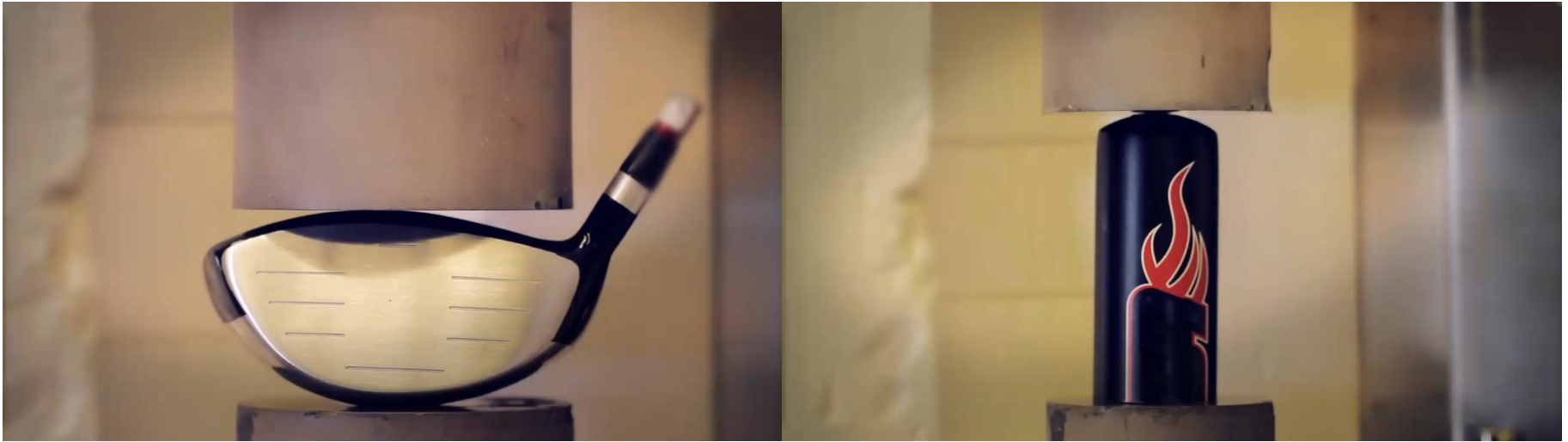
## Partie I:

# Propriétés des matériaux et défaillance



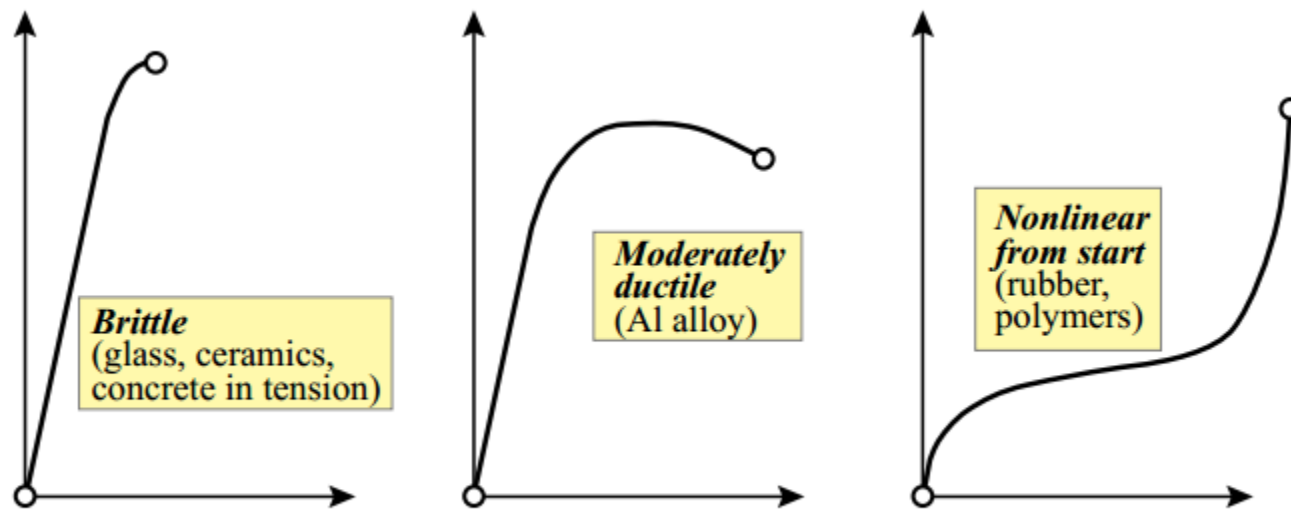
## **Partie I: Propriétés des matériaux**

1. Courbe contrainte – déformation relative
2. Contrainte limite d'élasticité et facteur de sécurité
3. Propriétés
4. Concentration de contraintes



# Comportement des matériaux

## La courbe Contrainte – Déformation relative

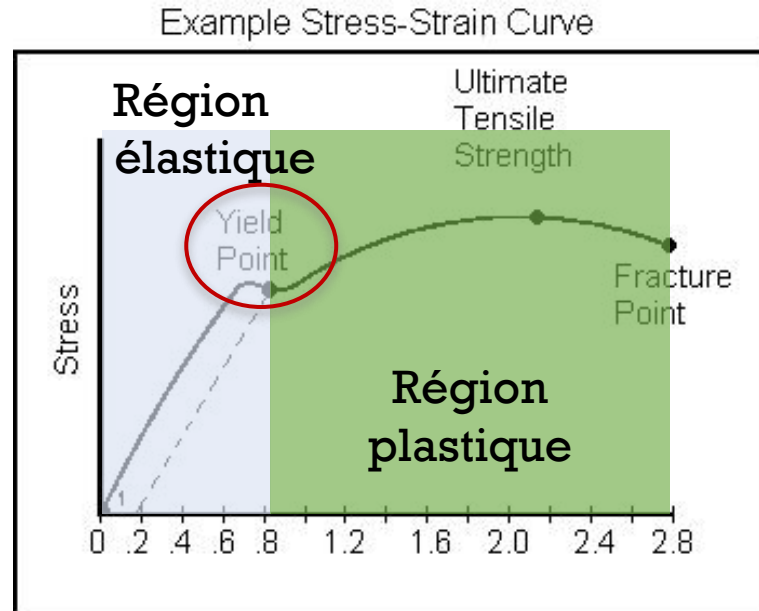


Three material response “flavors” as displayed in a tension test.

- Les courbes Contrainte – Déformation relative sont obtenues de manière expérimentale

# Régions et points importants

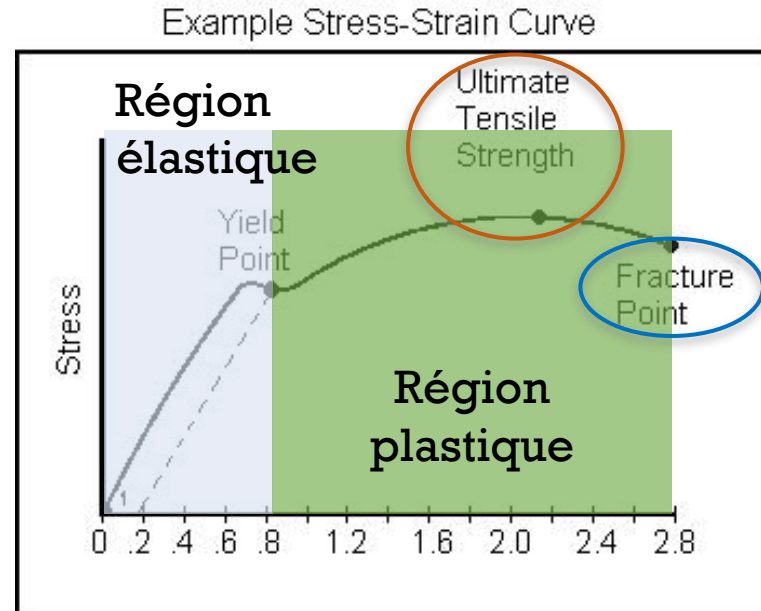
## La courbe Contrainte – Déformation relative



- La loi de Hooke décrit seulement la region linéaire de la courbe
- Le point de la courbe où la non-linéarité apparaît est la “limite d’élasticité” / **“Contrainte limite d’élasticité” / yield point**
- Passé la limite d’élasticité un changement moindre de contrainte entraîne une déformation relative plus importante

# Régions et points importants

## La courbe Contrainte – Déformation relative



- Le point correspondant à la contrainte maximale avant la rupture est appelé “**contrainte à la rupture**” du matériau
- Le point où le matériau se rompt est le “**point de rupture**”
- La définition du “point de défaillance” dépend de l’application

# Résistance à la fracture

## L'origine atomique

---

- La résistance à la fracture d'un matériau élastique fragile dépend idéalement de la force des liaisons intermoléculaires
- De la théorie: la résistance à la fracture devrait être de  $10^{-1}E$
- En réalité: la résistance à la fracture est de  $10^{-2}E$  to  $10^{-4}E$
- La résistance à la fracture est fortement déterminée par des défauts dans le matériau (dislocations dans le crystal, micro-fissures, impuretés) qui mènent à de la concentration de contraintes

# Résistance à la fracture

## Critères de défaillance

- Lors d'applications, les conditions de charge sont différentes de celles utilisées lors de tests en laboratoire
- Différents matériaux et géométries nécessitent différents critères de défaillance
- Il nous faut des critères fiables pour déterminer quand une structure sera défaillante ou non
- Le facteur de sécurité compare la Contrainte limite d'élasticité à la Contrainte maximale ou équivalente respective dans le matériau

Dans ce cours, étant donné que nous traitons que le régime linéaire, nous allons considérer la limite d'élasticité comme le critère de défaillance. Nous comparerons la contrainte maximale dans le matériau à cette **“Contrainte limite d'élasticité” / “Yield point”**

- Dans des applications concrètes, comme dans le projet en Conception des Mécanismes II, il vous faudra tenir compte du domaine plastique des matériaux ductiles

# Résistance à la fracture

## Critères de défaillance

**Facteur de sécurité:** est un ratio affecté à la contrainte maximale afin de garantir une utilisation en toute sécurité dans la pratique

### 1- Critère de la contrainte maximale

$$\text{Facteur de sécurité } (FS) = \frac{\text{Contrainte limite d'élasticité}}{\text{Contrainte maximale prévue}}$$

$$FS = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{max}}$$

### 2- Critère de Von Misses:

$$\text{Facteur de sécurité } (FS_{VM}) = \frac{\text{Contrainte limite d'élasticité}}{\text{Contrainte de Von Misses}}$$

$$FS_{VM} = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{VM}}$$

Pour un design robuste, **le facteur de sécurité doit être > 2**

$\sigma_{yield}$  = contrainte limite d'élasticité qui est une propriété du matériau

$\sigma_{max}$  et  $\sigma_{VM}$  représentent les contraintes maximales dans le matériau suivant deux approches

# Propriétés des matériaux

## Définition

---

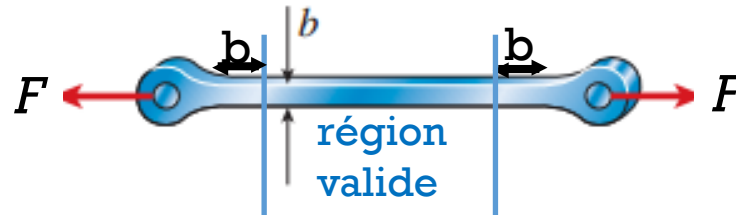
- **Rigidité**: La propriété d'un matériau qui fait qu'il peut supporter une grande contrainte sans grande déformation relative. Il en résulte une première partie pentue de la courbe contrainte-déformation relative. La rigidité est directement reliée au module d'élasticité.
- **Élasticité**: Permet à un matériau de regagner ses dimensions originales suite au retrait d'une charge entraînant sa déformation.
- **Fragilité**: L'absence de déformation plastique avant une défaillance abrupte. Peut supporter des contraintes plus élevées mais peu de déformation relative à comparer à des matériaux ductiles.
- **Ductilité**: Décrit la quantité de déformation *plastique* qu'un matériau peut subir en traction avant rupture. Peut supporter beaucoup plus de déformation relative mais moins de contrainte que les matériaux fragiles.
- **Malléabilité**: Décrit la quantité de déformation *plastique* qu'un matériau peut subir en compression avant rupture.

## Définition

---

- **Résistance** : Détermine la contrainte maximale qu'un matériau peut supporter avant défaillance. Elle dépend du matériau et de la situation, si la défaillance est liée à la contrainte limite d'élasticité ou au point de fracture.
- **Ténacité**: La quantité d'énergie qui est requise pour fissurer un matériau. Elle permet à un matériau de supporter de grandes charges sous forme d'impact. Pour ce type de charge, une partie de l'énergie d'impact est transférée et absorbée par l'objet.
- **Résilience**: L'abilité d'un matériau d'endurer de grandes charges lors d'impact sans générer une contrainte au-dessus de la limite d'élastique. Dans les matériaux résilients, l'énergie de l'impact est emmagasinée dans le corps et récupérée quand le corps n'est plus soumis à la charge.

- La condition de contrainte uniforme existe sur toute la longueur de la barre sauf près de ses extrémités.
- La distribution de la contrainte à la fin de la barre dépend de comment la charge  $F$  est transmise à la barre.
- S'il arrive que la charge soit distribuée uniformément sur les bouts, alors la distribution de la contrainte sera la même que sur le reste de la barre.
- Cependant, il sera plus vraisemblable que la charge sera transmise au travers d'un rivet ou d'un boulon produisant des concentrations de contraintes localisées.

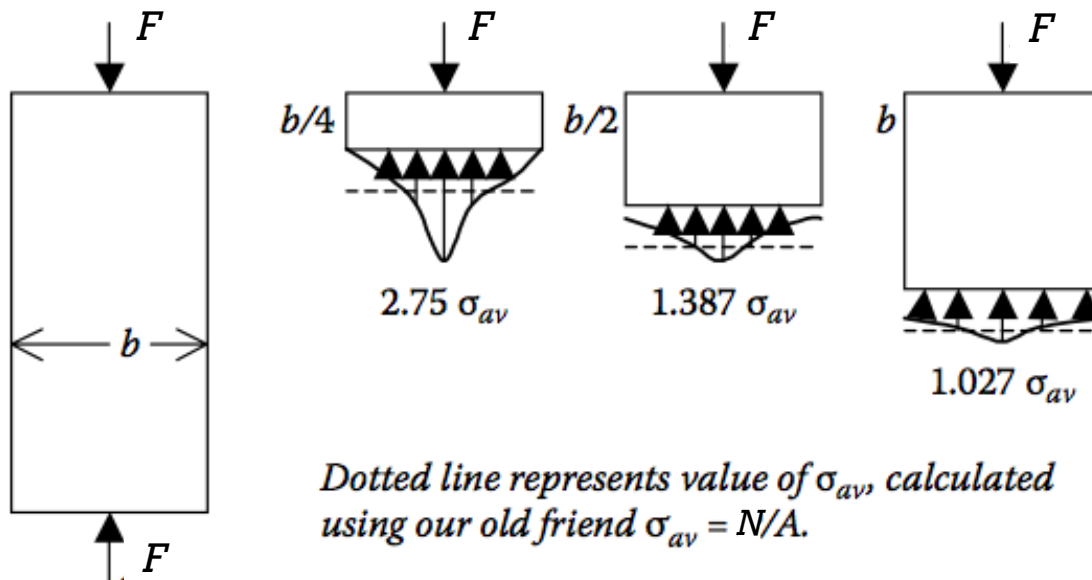


- La formule  $\sigma = N/A$  peut-être utilisée avec une bonne précision pour n'importe quel point dans une barre prismatique à une distance correspondant à la largeur de la barre ( $b$  sur la figure ci-dessus).

# Concentration de contraintes

## Principe de Saint-Venant

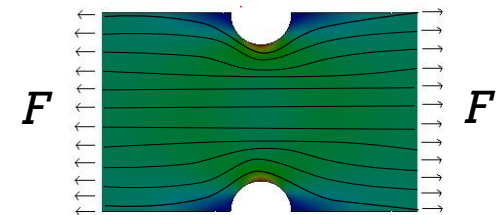
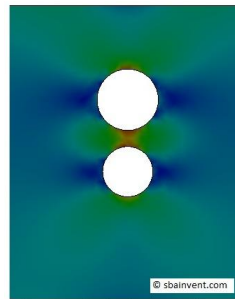
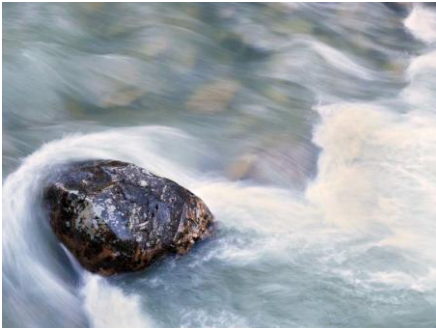
- Les forces en réalité sont rarement distribuées uniformément sur les surfaces sur lesquelles elles agissent
- *Le Principe de Saint-Venant* stipule que **la manière dont la force est appliquée joue un rôle seulement près du point d'application de la force**
- Pour une barre avec une charge ponctuelle **les contraintes normales sont quasi constantes sur une surface à une distance de la force appliquée correspondant à la largeur du corps**



# Concentration de contraintes

## Analogie avec le débit des fluides

- La concentration de contraintes peut être vue de façon similaire à la distribution de vitesse d'écoulement d'un fluide lorsqu'il y a une réduction de la section

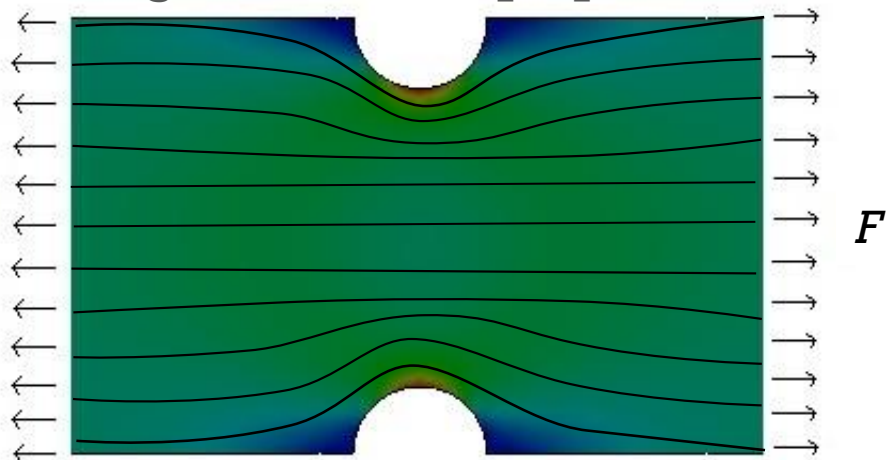


- Une pierre avec de l'eau s'écoulant autour est analogue à une barre avec un trou
- L'eau coolant entre deux pierres est analogue à une barre avec 2 encoches

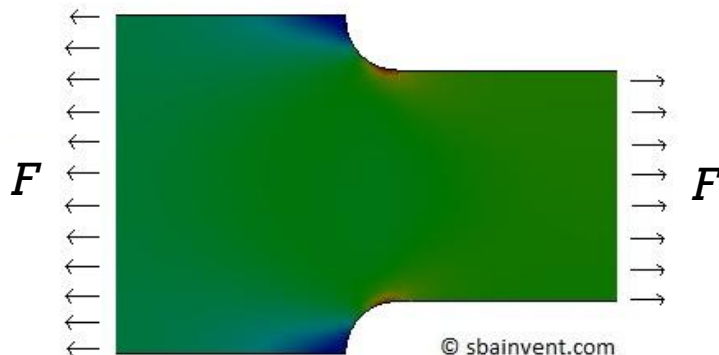
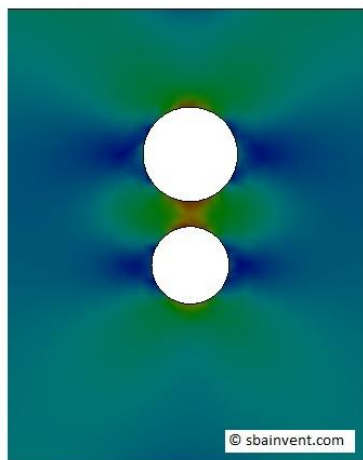
# Concentration de contraintes

## Analogie avec le débit

Image d'un fluide qui parcourt une structure.



- Dans les endroits où il y a une augmentation de la vitesse d'écoulement, il y a une concentration de contrainte positive (augmentation locale de contrainte: en rouge). Les lignes de la force interne sont plus denses.
- Dans les endroits où il y a une diminution de la vitesse d'écoulement du fluide, il y a une concentration de contrainte négative (une diminution locale de la contrainte: en bleu).



# Concentration de contraintes

- Du principe de Saint-Venant nous savons aussi que la contrainte maximale dans une structure et sa relation à la contrainte nominale est fonction de sa géométrie.

$$\sigma_{max} = K \sigma_{nom} = K \frac{N}{A}$$

- K est le facteur de concentration de contrainte et peut être déterminé expérimentalement et numériquement
- Ce facteur K est répertorié sur des graphiques et dans des tableaux pour différentes géométries

Ceci est pour information en tant qu'ingénieur (et donc pas à l'examen).

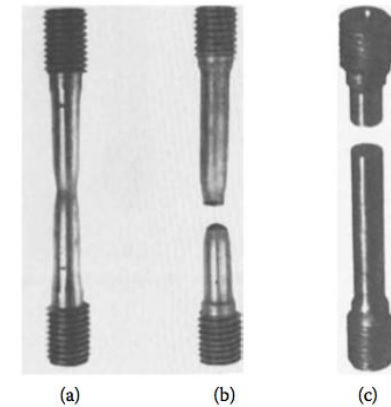
# Fracture

## Manifestation macroscopique de $\sigma$ vs. $\epsilon$

- Une “Constriction” se produit avant la rupture de matériaux ductiles, qui est un résultat d’une combinaison de l’effet de Poisson et de la concentration de contrainte.



Original diameter of specimen



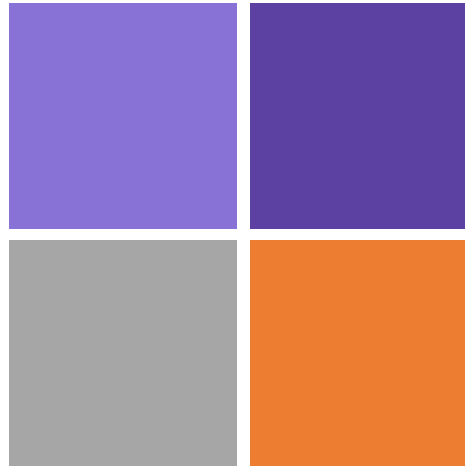
### Matériaux soumis à un test de traction uniaxiale

- Matériau ductile avec constriction
- Matériau ductile avec constriction après sa rupture
- Matériau fragile après rupture (ex. acier fonte, verre, pierre)

# Semaine 4

## Partie II:

# Transformation des contraintes



### **Partie II: Transformation**

1. Des états de contrainte dans le plan
2. Contraintes principales et maximales
3. Des états de déformation relative dans le plan
4. En 3D

# Pourquoi la transformation de contraintes ?

- Plusieurs matériaux ne sont pas résistants de façon uniforme dans toutes les directions.
- Exemple: Composite en carbone est très fort dans une direction, beaucoup plus faible dans les autres directions.



# Pourquoi la transformation de contraintes ?



# Contraintes dans des barres chargées axialement

$v = 0$  : déformation relative latérale négligée

- Barre fixée à  $x=0$  et avec une charge  $F$  à  $x=L$  (figure a)
- Méthode des sections sur un plan normal à l'axe de la barre (figure b)

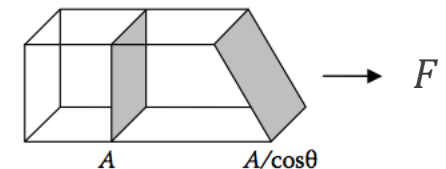
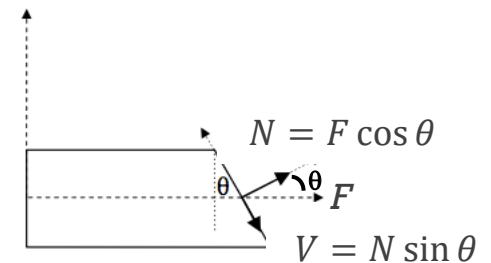
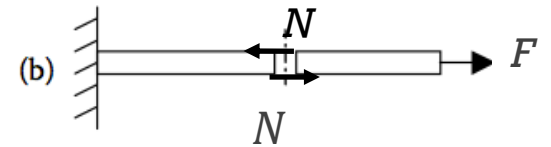
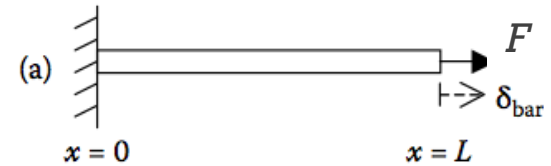
$$\sigma \equiv \frac{N}{A_{\perp}} \Rightarrow \sigma \equiv \frac{F}{A}$$

- Application de la méthode des sections sur le plan avec un angle par rapport à l'axe (figure c)

## Dépendance angulaire de la contrainte

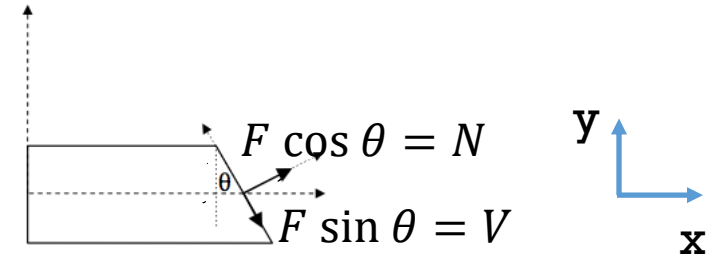
$$\sigma_{\theta} = \frac{\text{force}}{\text{area}} = \frac{F \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{F \sin \theta}{A / \cos \theta} = -\frac{F}{A} \sin \theta \cos \theta$$

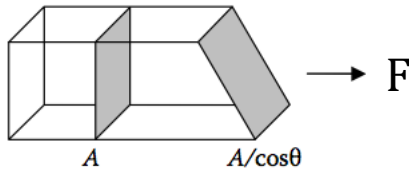


# Contraintes dans des barres chargées axialement

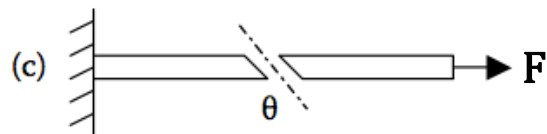
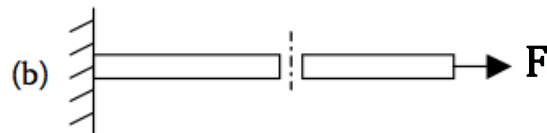
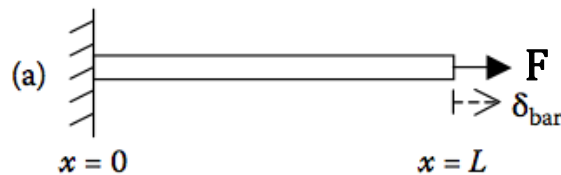
## ■ Décomposition de la force $F$



## ■ Calcul de la nouvelle aire



## Contraintes normale et de cisaillement sur une section inclinée avec un angle $\theta$



$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A_{\perp}} = \frac{F \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{V}{A_{\parallel}} = -\frac{F \sin \theta}{A / \cos \theta} = -\frac{F}{A} \cos \theta \sin \theta$$

# Contraintes barres chargées axialement

## Directions des contraintes maximales

### ■ Contrainte normale maximale:

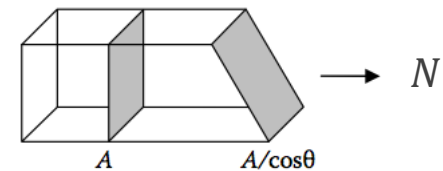
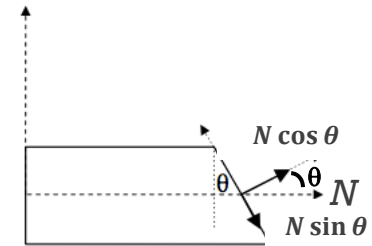
$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A} \cos^2 \theta \rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{N}{A}} @ \theta = 0$$

### ■ Contrainte de cisaillement maximale:

$$\frac{d}{d\theta} \tau_{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{N}{A} \sin \theta \cos \theta \right) = 0 \rightarrow \theta = 45^{\circ}$$

$$|\tau_{max}| = \frac{N}{A} \sin(\pi/4) \cos(\pi/4)$$

$$\boxed{|\tau_{max}| = \frac{N}{2A} = \frac{\sigma_{max}}{2}}$$



# Contrainte maximale dans une barre ?

A considérer comme un problème 2D

Calculer la force maximale qui peut être appliquée avant défaillance, en considérant un facteur de sécurité (FS) égal à 2.

- A. 1.57 kN
- B. 0.628 kN
- C. 3.14 kN
- D. 0.157 kN
- E. 0.314 kN

Contrainte limite d'élasticité

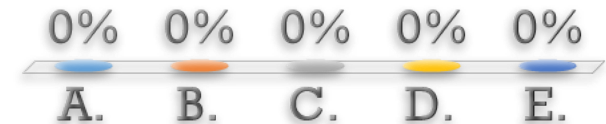
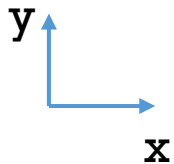
normale:  $\sigma_{\text{yield}} = 10 \text{ MPa}$

cisaillement:  $\tau_{\text{yield}} = 1 \text{ MPa}$

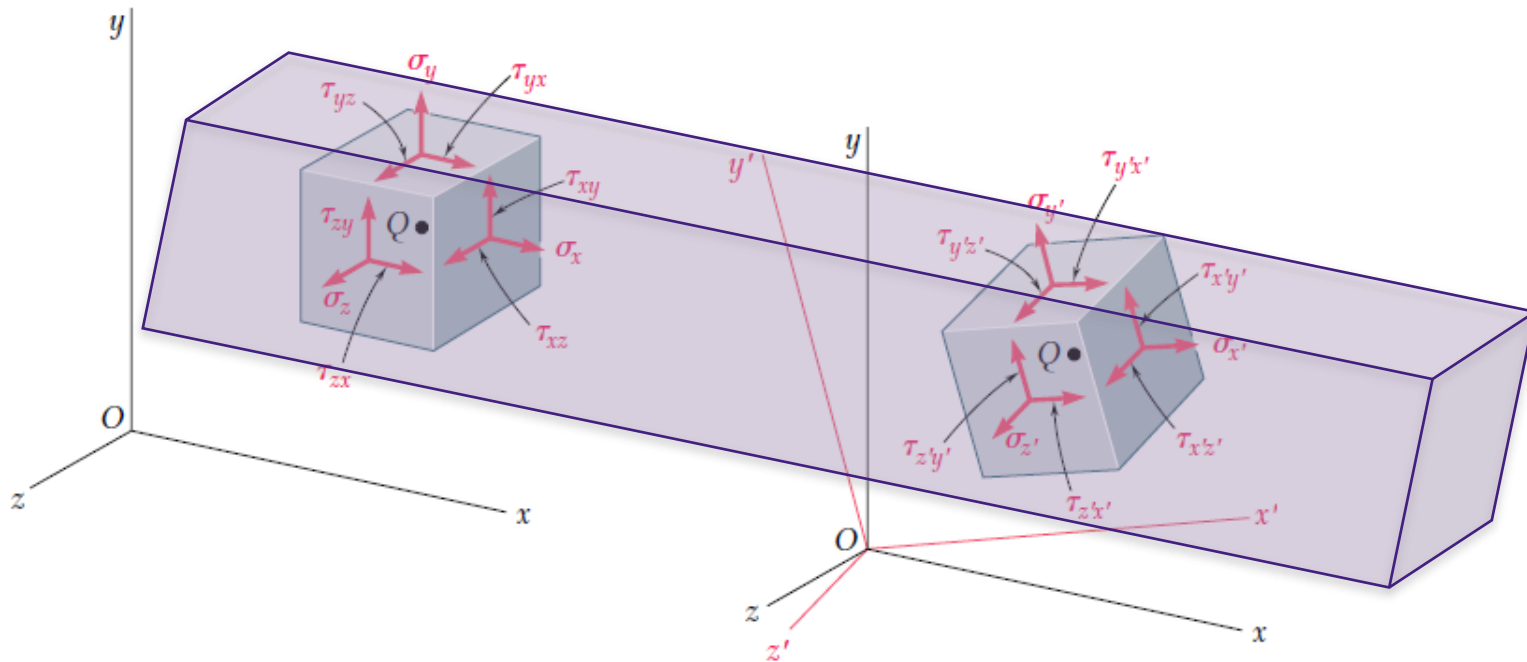


$D = 0.02 \text{ m}$ ,  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $E = 10 \text{ GPa}$ .

L'effet de Poisson est négligeable.



- Nous regardons les contraintes selon différentes directions dans le matériau



Cube  $dx dy dz$

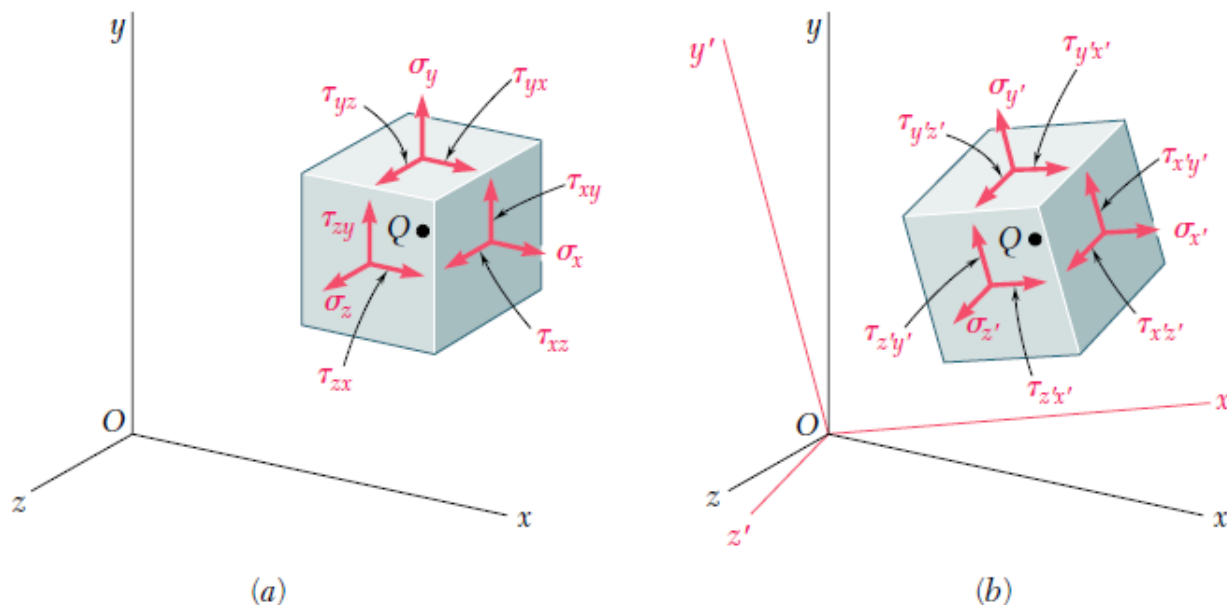
# Transformation de la contrainte et de la déformation relative

---

- Dépendamment du plan interne, nous pouvons avoir **des distributions de contraintes différentes**
- Des **contraintes peuvent être nulles** dans certaines directions
- Au travers d'**une combinaison de contraintes normales et de cisaillement** pour des directions données, **des contraintes plus élevées peuvent être trouvées dans d'autres directions**
- La question est de comment regarder les contraintes sur des plans avec différentes orientations ?

# Transformation de la contrainte et de la déformation relative

- Nous pouvons représenter les états de contraintes et de déformations relatives par des tenseurs
- Nous allons “juste” **effectuer une transformation de coordonnées (changement de base) du tenseur** dans le nouveau système de coordonnées avec les vecteurs unitaires dans les directions d'intérêt



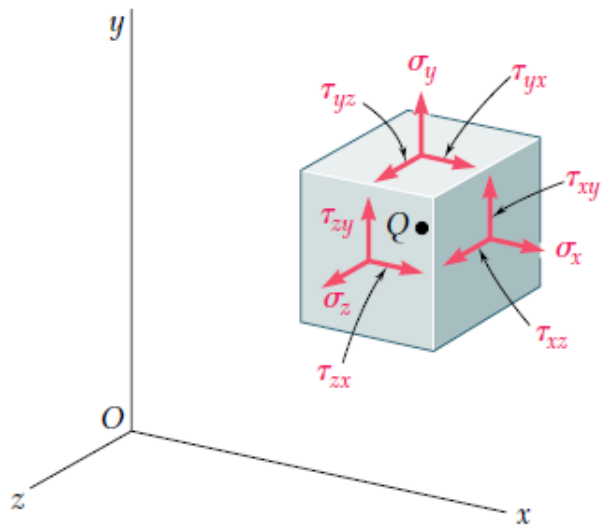
Cube à l'intérieur de la barre, avec sa rotation nous regardons les contraintes sur différents plans dans l'objet

# Transformation de contraintes

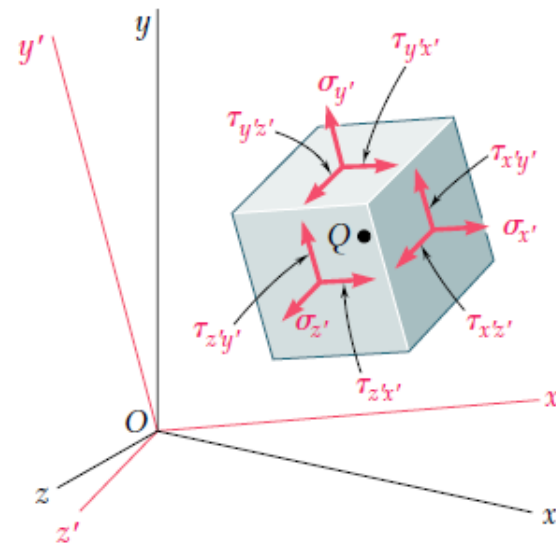
- $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$

- $\tilde{\sigma}' = R \cdot \tilde{\sigma} \cdot R^{-1}$

- Où  $R$  est la “matrice de rotation” ou la matrice pour changer de base utilisée en mécanique des structures

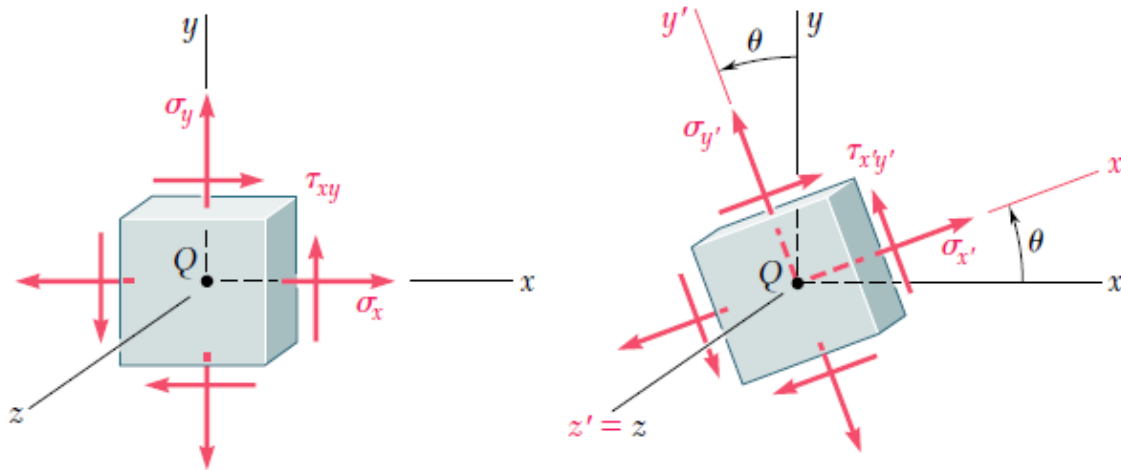


(a)



(b)

## Transformation des contraintes dans le plan



**$\theta$  est positif dans le sens antihoraire**

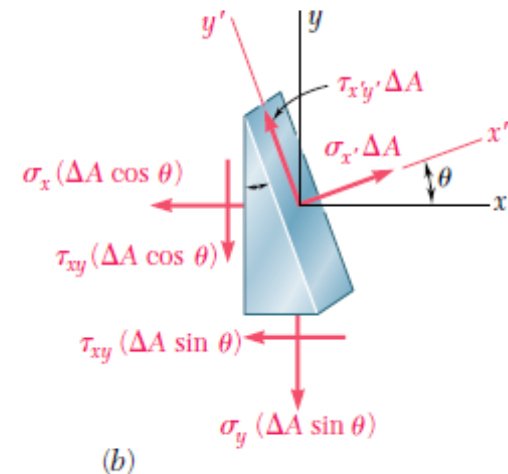
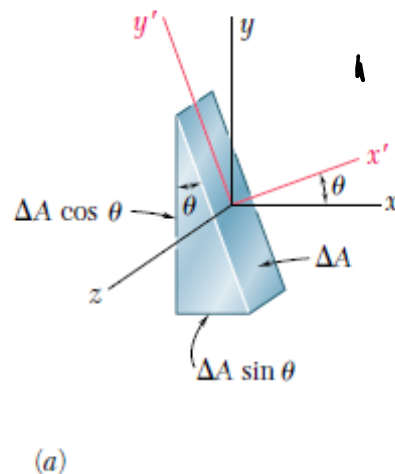
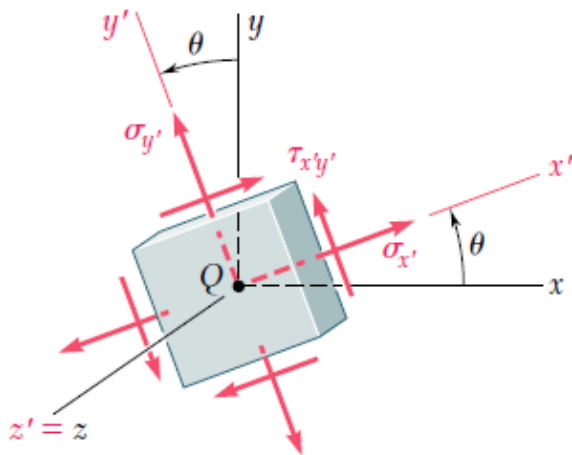
# Transformation de contraintes dans le plan

## MÉTHODE 1: équilibre

- Refaisons ce que nous avons fait en 1D/3D, maintenant en 2D

$$\sum F_{x'} = 0: \quad \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$



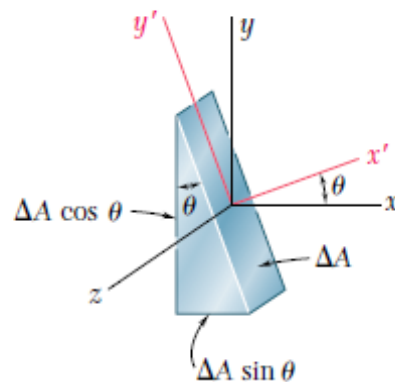
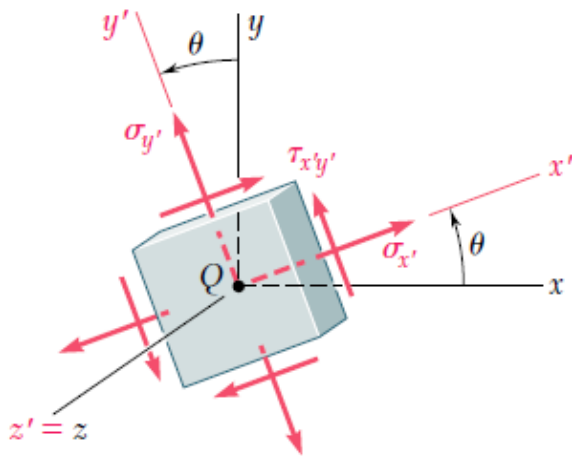
# Transformation de contraintes dans le plan

## MÉTHODE 1: équilibre

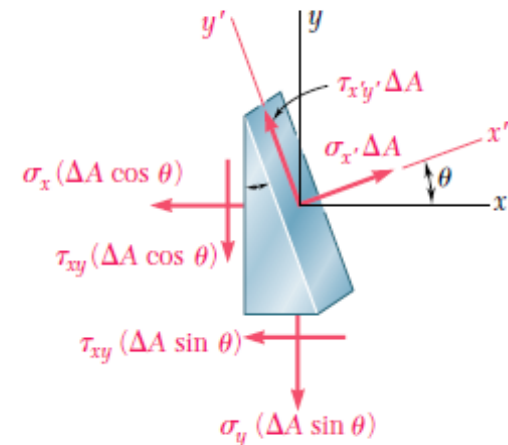
- Refaisons ce que nous avons fait en 1D/3D, maintenant en 2D

$$\sum F_{y'} = 0: \quad \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



(a)

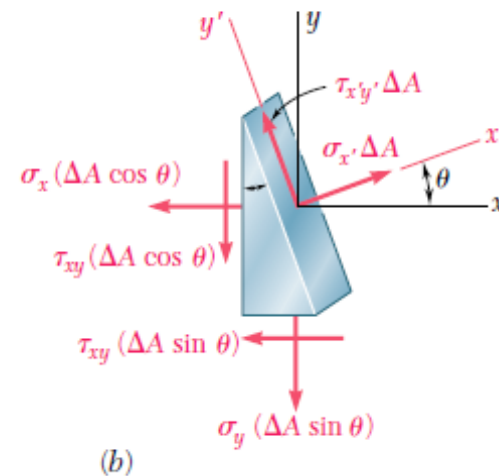
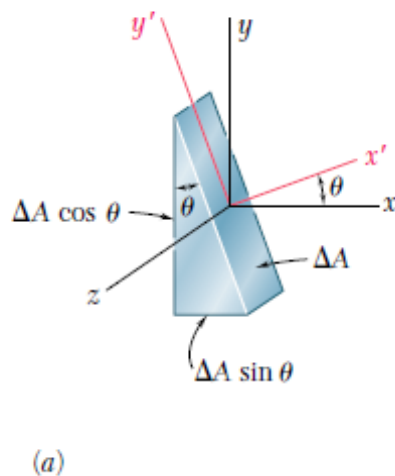
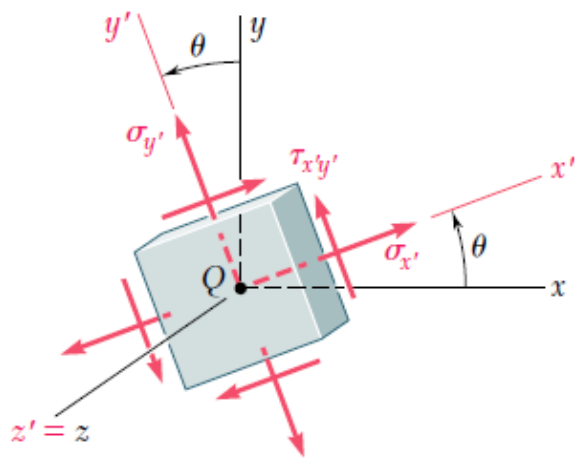


(b)

# Transformation de contraintes dans le plan

## MÉTHODE 1: équilibre

- $\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta)$
- $\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
- $\sigma_{y'} = \sigma_y \cos^2(\theta) + \sigma_x \sin^2(\theta) - 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta)$



# Transformation de contraintes dans le plan

## MÉTHODE 2: Matrice de rotation

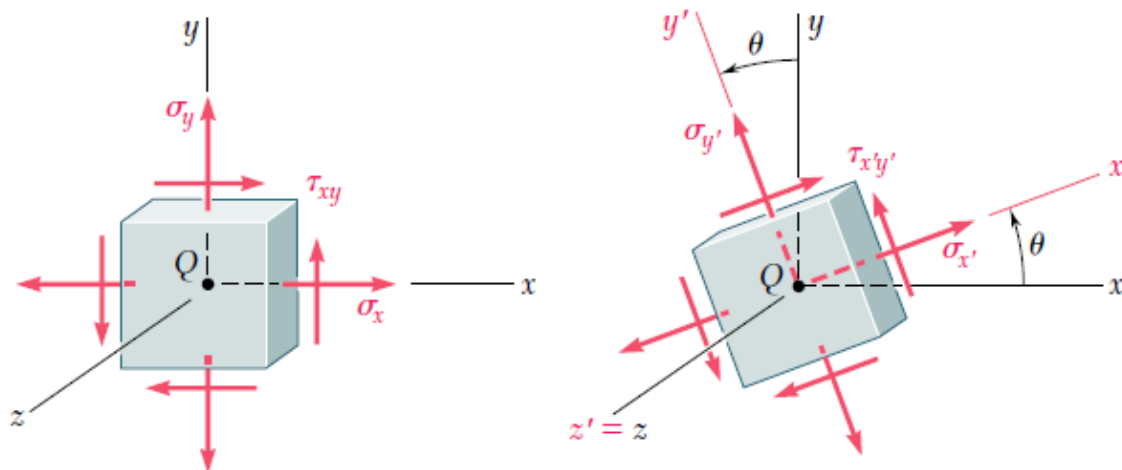
$$\blacksquare \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \tilde{\sigma}' = R \cdot \tilde{\sigma} \cdot R^{-1} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot R^{-1} = \mathbb{I}$$

Matrices de rotation\* des axes pour regarder d'autres directions /plans

\*spécifique pour la transformation en mécanique des structures



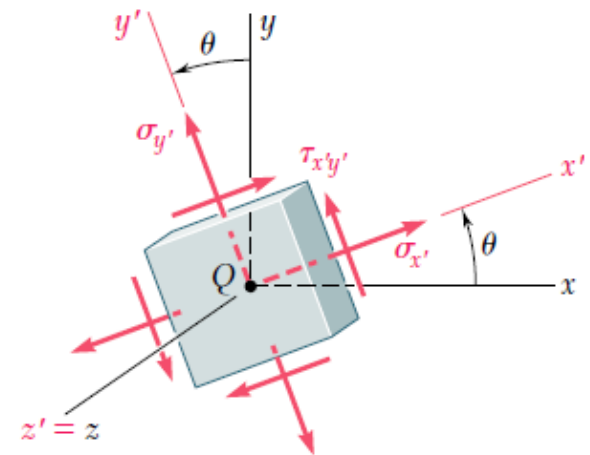
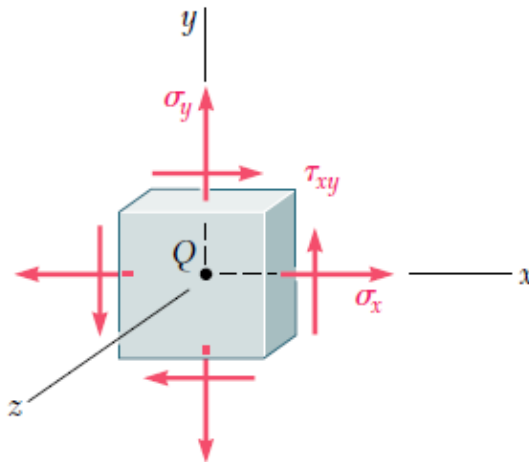
# Transformation de contraintes dans le plan

## MÉTHODE 2: Matrice de rotation

- $\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta)$
- $\sigma_{y'} = \sigma_y \cos^2(\theta) + \sigma_x \sin^2(\theta) - 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta)$
- $\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$



# Transformation de contraintes dans le plan

## Equations finales

- En utilisant des propriétés trigonométriques:

$$\square \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\square \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\square \tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

Noter que:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

- $\sigma_{x'}$  et  $\sigma_{y'}$  ont la même expression avec une différence de  $90^\circ$

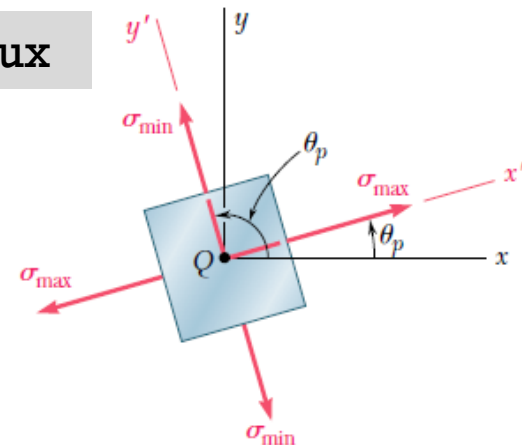
- Il y a des directions pour lesquelles les contraintes normales sont maximisées / minimisées

$$\sigma_{Max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Ce sont les **contraintes principales** et les axes correspondants sont les **axes principaux**

$\theta_p$ : Angle de rotation pour atteindre les axes principaux

Noter que pour les axes principaux:  
 $\tau_{x'y'} = 0$  (pas de cisaillement)



- Il y a une autre direction qui maximise les contraintes de cisaillement:

$$\tau_{Max/min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

La valeur absolue de la contrainte de cisaillement est la même pour les axes de la contrainte maximale et minimale.

Ce qui est compréhensible, étant donné que le matériau ne se soucie pas du sens du cisaillement (vers la droite ou vers la gauche)

Les **contraintes de cisaillement maximales** seront localisées à  $\theta_p \pm 45^\circ$

- Pour cette direction, la contrainte normale associée prend une valeur moyennée:

$$\sigma_{x'} = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

# Contrainte maximale de cisaillement

**Déterminer la contrainte de cisaillement maximale** pour ce carré 2D après application des contraintes normales suivantes.

- $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$  &  $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$

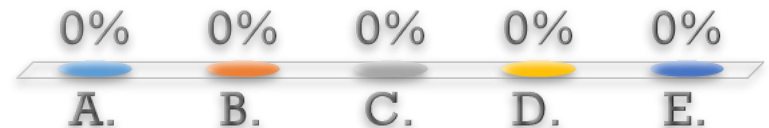
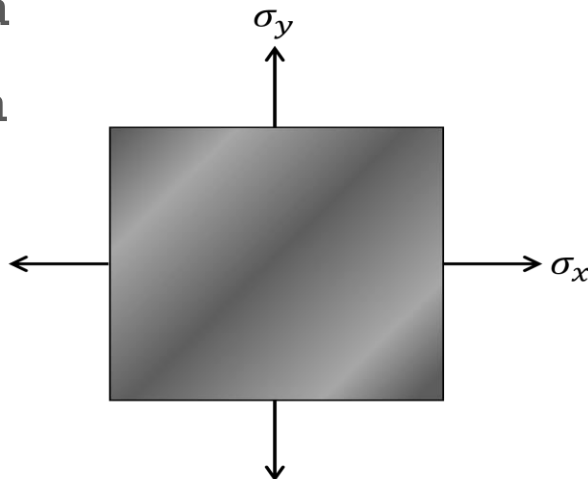
A. 10 MPa

B. 30 MPa

C. 20 MPa

D. 40 MPa

E. 0 MPa



# Contraintes principales et maximales

## MÉTHODE

- Le tenseur de contraintes est symétrique, donc diagonalisable

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma_{Max} & 0 \\ 0 & \sigma_{min} \end{pmatrix}$$

- Trouver les contraintes principales équivaut à trouver les termes diagonaux, aussi connues comme les *valeurs propres*,  $\lambda$
- Pour se faire, nous devons résoudre l'équation:  $\det|\tilde{\sigma} - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (\sigma_x - \lambda)(\sigma_y - \lambda) - \tau_{xy}^2$$

$$\lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_{Max} \\ \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

# Contraintes principales et maximales

## MÉTHODE

- Pour se faire, nous devons résoudre l'équation:  $\det|\tilde{\sigma} - \lambda I| = 0$

$$\sigma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Et nous obtenons les vecteur propres:

$$\square \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\theta_p = \arctan (b/a)$$

- Les vecteurs propres fournissent l'orientation des contraintes maximales
- Des vecteurs, l'angle entre les axes principaux et les axes de coordonnées originaux,  $\theta_p$ , peut être calculé
- Les contraintes de cisaillement maximales seront localisées à  $\theta_p \pm 45^\circ$

# Contrainte maximale dans une barre

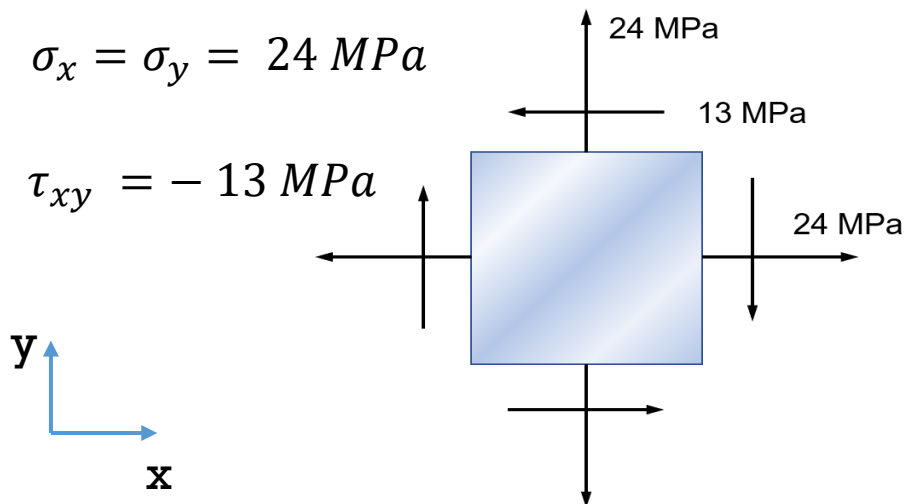
Pour cet état de contraintes dans le plan, quelles sont les valeurs des contraintes principales et de cisaillement maximale dans le plan ?

A.  $\sigma_{\text{Max}} = 37 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{Min}} = 11 \text{ MPa}$   $\tau_{\text{Max}} = \pm 13 \text{ MPa}$

B.  $\sigma_{\text{Max}} = 24 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{Min}} = 24 \text{ MPa}$   $\tau_{\text{Max}} = \pm 13 \text{ MPa}$

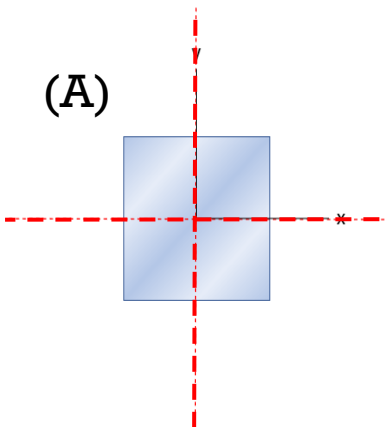
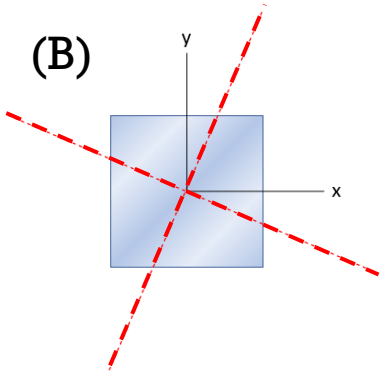
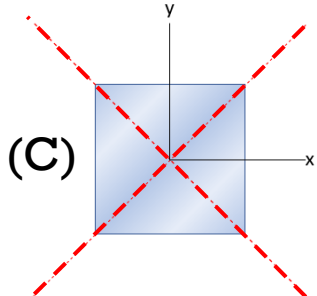
C.  $\sigma_{\text{Max}} = 24 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{Min}} = 24 \text{ MPa}$   $\tau_{\text{Max}} = \pm 25 \text{ MPa}$

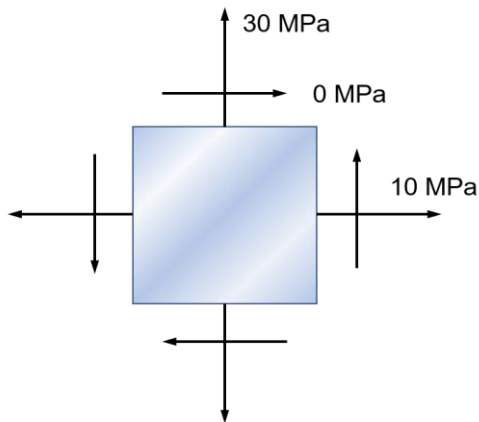
D.  $\sigma_{\text{Max}} = 37 \text{ MPa}$   $\sigma_{\text{Min}} = 11 \text{ MPa}$   $\tau_{\text{Max}} = \pm 25 \text{ MPa}$



# Axes des contraintes de cisaillement maximale et minimale

Pour cet état de contraintes dans le plan, **quels sont les axes des contraintes de cisaillement maximale et minimale dans le plan?**

- A. 
- B. 
- C. 
- D. Informations insuffisantes



# Transformation de déformations relatives dans le plan

- Nous utilisons la matrice de rotation dans le plan

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varepsilon}' = R \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot R^{-1}$$

**IMPORTANT:**

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) + \varepsilon_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta) - \varepsilon_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\varepsilon_{x'y'} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin(2\theta) + \varepsilon_{xy} \cos(2\theta)$$

# Transformation de contraintes et de déformation relatives dans le plan

## Résumé I

### Contraintes

$$\sigma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tau_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\text{Si } \tau_{xy} = 0 \Rightarrow \sigma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \sigma_x \text{ \& } \sigma_y$$

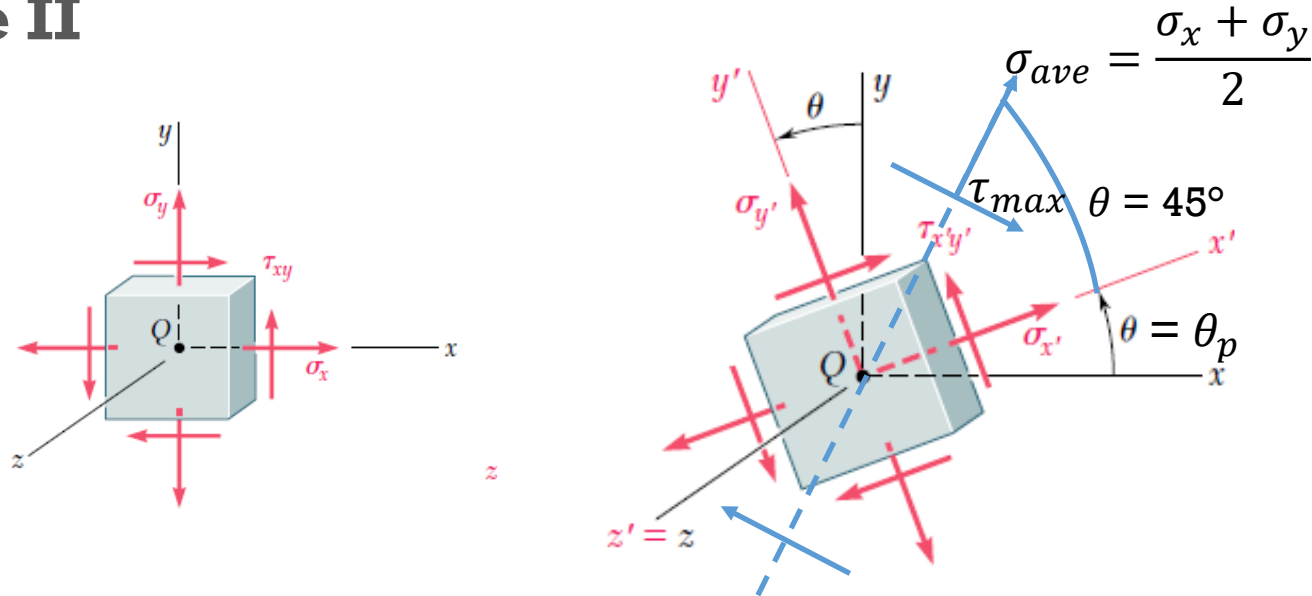
$$\text{Si } \tau_{xy} \neq 0 \Rightarrow \sigma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \sigma_1 \text{ \& } \sigma_2 \text{ à } \theta_p$$

### Déformation relatives

$$\varepsilon_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad \gamma_{\begin{matrix} Max \\ min \end{matrix}} = \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

# Transformation de contraintes et de déformation relatives dans le plan

## Résumé II

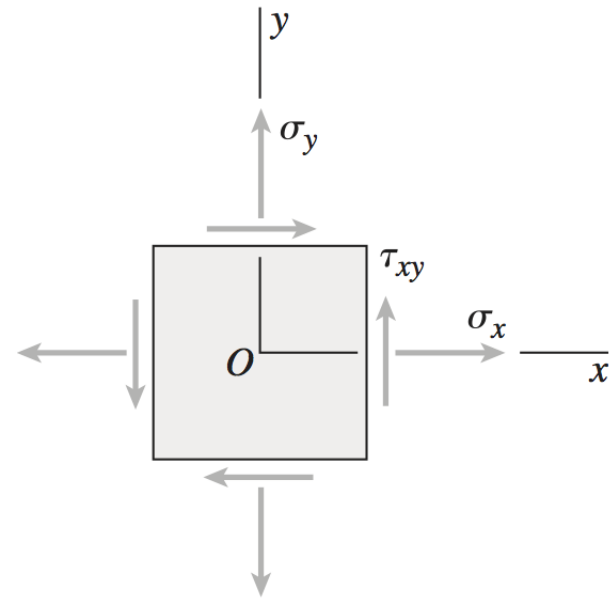


A  $\theta_p$ , sur les plans des axes principaux,  $\sigma_{x'} = \sigma_{1/\max}$ ,  $\sigma_{y'} = \sigma_{2/\min}$ ,  $\tau_{x'y'} = 0$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

# Exemple 4.0



Un élément en état de contraintes dans le plan est soumis aux contraintes suivantes:

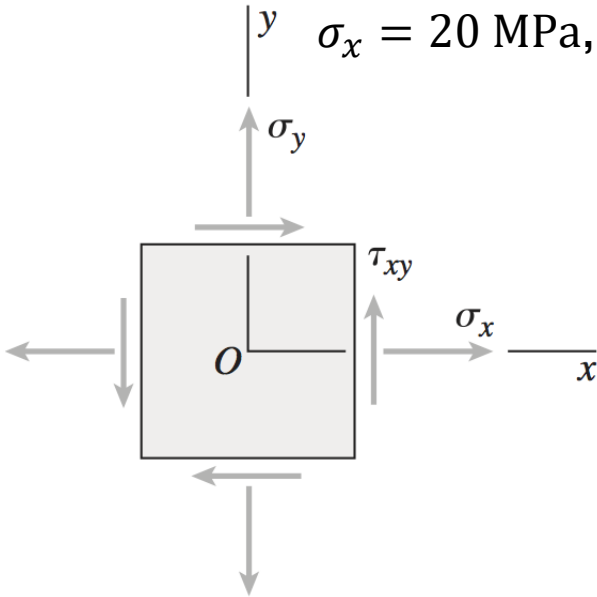
$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \sigma_y = 10 \text{ MPa} \text{ and } \tau_{xy} = 12 \text{ MPa}.$$

- Trouver les contraintes et les axes principaux
- Les contraintes de cisaillement maximales et les contraintes normales associées dans le plan  $xy$ .
- Déterminer les contraintes agissant sur un élément orienté avec un angle  $\theta = 45^\circ$  selon l'axe  $x$ .

# Exemple 4.0

a) Trouver les contraintes et les axes principaux

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \sigma_y = 10 \text{ MPa} \text{ et } \tau_{xy} = 12 \text{ MPa}$$



$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 - \lambda & 12 \\ 12 & 10 - \lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

$$(20 - \lambda)(10 - \lambda) - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0$$

$$\lambda = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 224}}{2} = \frac{30 \pm 26}{2} = \begin{cases} 28 \text{ MPa} \\ 2 \text{ MPa} \end{cases}$$

À partir des contraintes principales, on peut calculer les directions principales:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 28 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 20a + 12b = 28a \\ 12a + 10b = 28b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{8}b \\ a = \frac{18}{12}b \end{cases} \rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

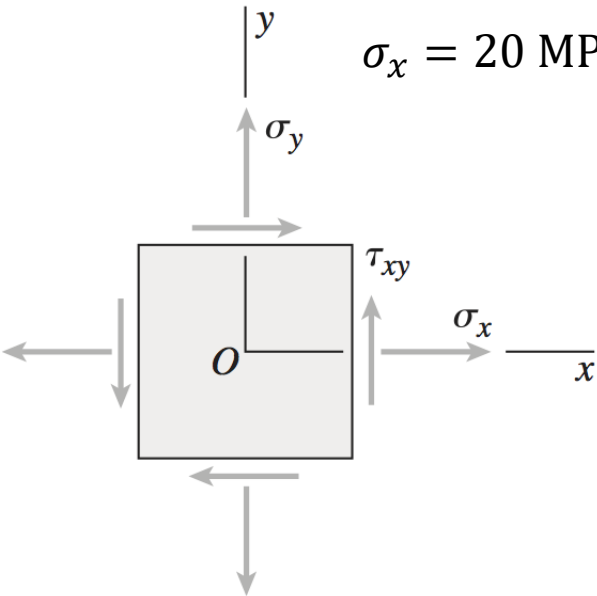
Le premier axe principal lié à  $\sigma_{\max}$  est dans la direction du vecteur  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le deuxième axe principal lié à  $\sigma_{\min}$  est dans la direction du vecteur  $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

# Exemple 4.0

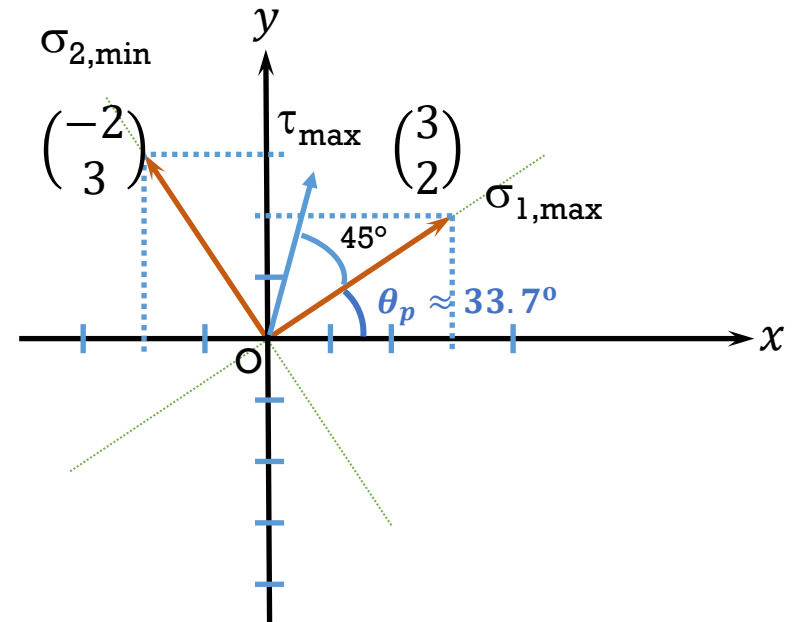
Trouver les contraintes et les axes principaux

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \sigma_y = 10 \text{ MPa} \text{ and } \tau_{xy} = 12 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{Max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Sur les plans perpendiculaires aux axes principaux trouvés, les contraintes de cisaillement sont nulles.

# Exemple 4.0

b)  $\tau_{x'y'}$  maximum et les  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  associés dans le plan  $xy$

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \sigma_y = 10 \text{ MPa and } \tau_{xy} = 12 \text{ MPa}$$

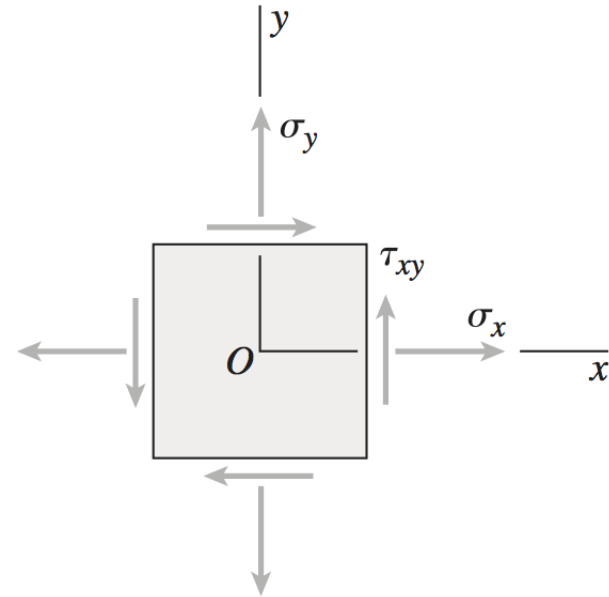
$$\tau_{Max} = \pm R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Nous pouvons aussi utiliser:  $\tau_{Max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{28 - 2}{2} = 13 \text{ MPa}$

$$\theta_{\text{cisaillement max,min}} = \theta_P \pm 45^\circ$$

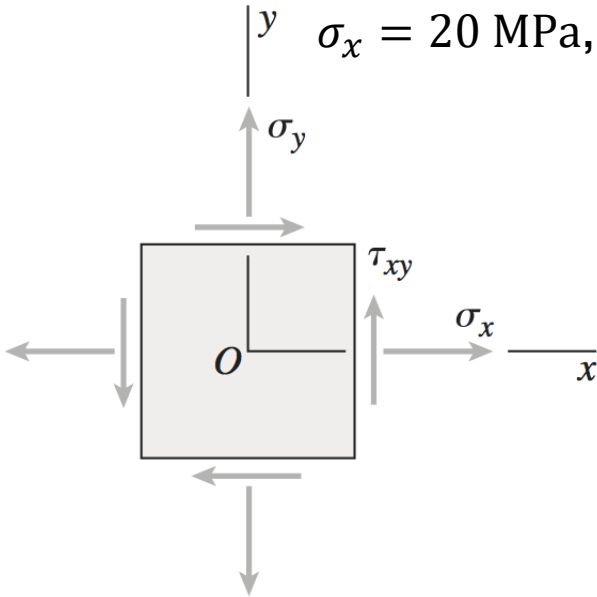
Puis les contraintes normales associées sont :

$$\sigma_{x\tau_{Max}} = \sigma_{y\tau_{Max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{x0} + \sigma_{y0}}{2} = 15 \text{ MPa}$$



# Exemple 4.0

c) Les contraintes agissant sur un élément orienté à un angle  $\theta = 45^\circ$  de l'axe 'x'



$\sigma_x = 20 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$  and  $\tau_{xy} = 12 \text{ MPa}$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 0; \sin(2\theta) = 1;$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy} = 27 \text{ MPa}$$

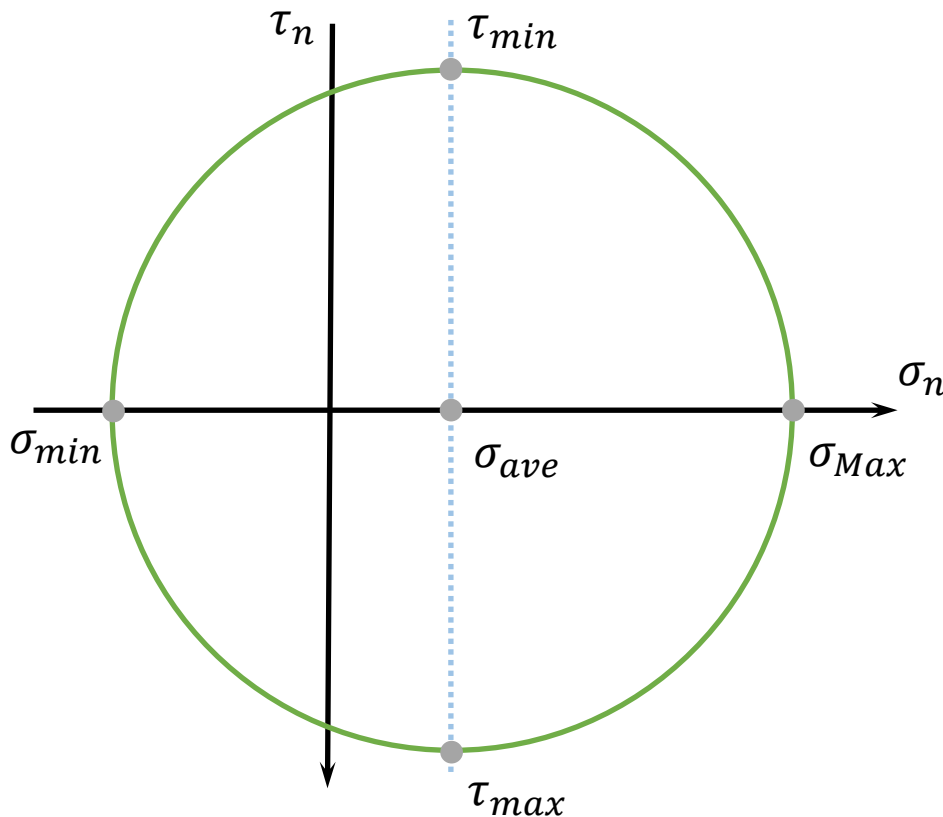
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy} = 3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = -5 \text{ MPa}$$

# Cercle de Mohr

## Transformation de contraintes en 2D

- Les contraintes normales et de cisaillement pour tous les plans peuvent être représentées par un cercle (de Mohr)



$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \tau_{Max}_{min}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

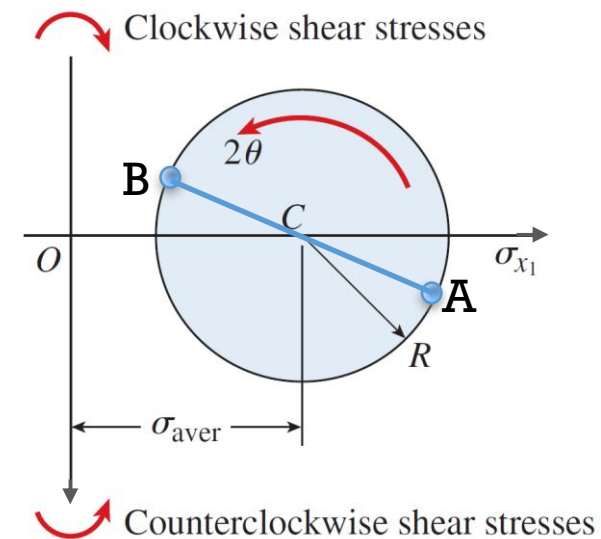
$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

# Cercle de Mohr

## Comment le dessiner

1. Etablir un système de coordonnées où l'axe horizontal est lié aux contraintes normales et l'axe vertical est lié aux contraintes de cisaillement. (ATTENTION: cisaillement positif vers le bas)
2. Positionner 2 points connus de l'état de contraintes original:
  - A: Les contraintes de la face positive de l'élément avec comme coordonnées  $(\sigma_x, \tau_{xy})$
  - B: Les contraintes sur la face du dessus de l'élément avec comme coordonnées  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$
3. Le point où la ligne AB intersecte l'axe  $\sigma$  est la contrainte moyenne  $\sigma_{ave} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$
4. Dessiner le cercle autour de  $\sigma_{ave}$  qui passe par les points A et par B



# Cercle de Mohr

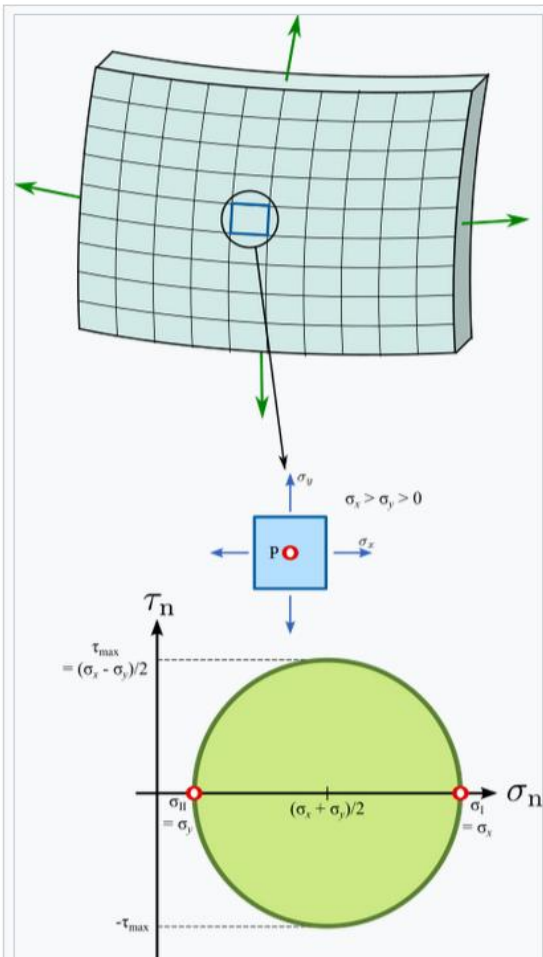
## Comment l'utiliser

---

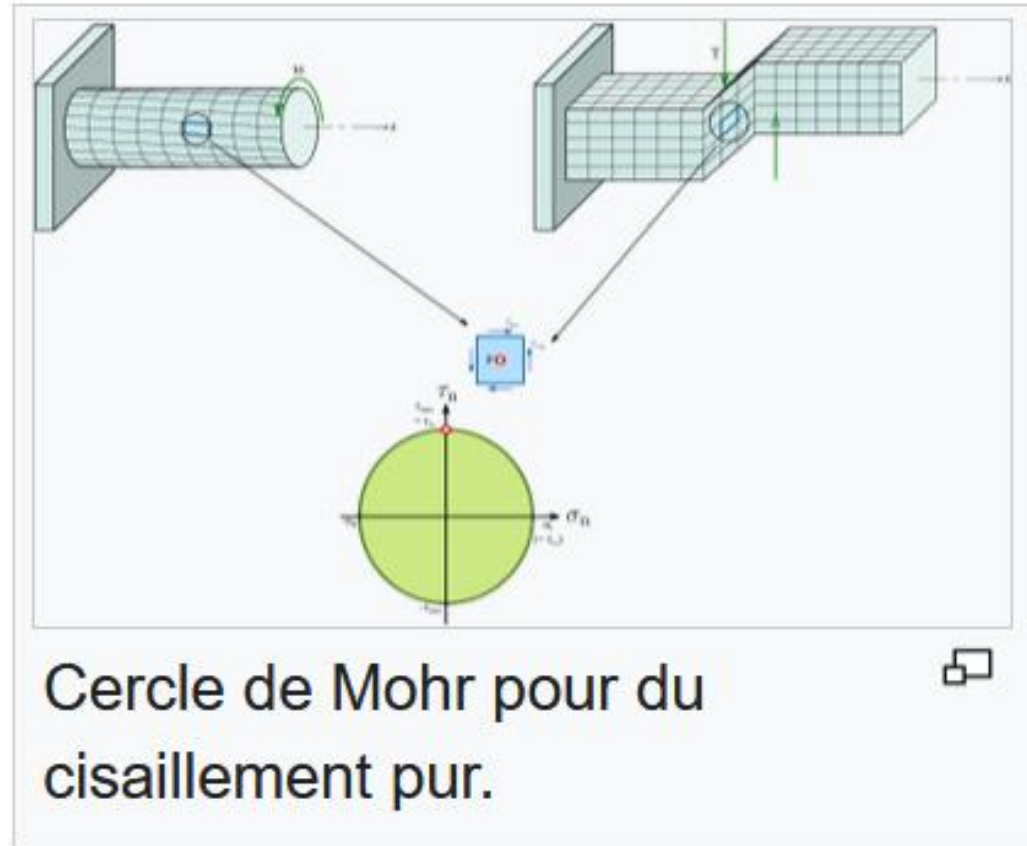
- La Contrainte de cisaillement maximum est le rayon du cercle
- Pour trouver les contraintes normales et de cisaillement dans un système de coordonnées avec une rotation d'un angle  $\theta$  par rapport aux plans de référence:
  1. Dessiner un axe avec un angle  $2\theta$  de l'axe représentant les plans de référence;
  2. Déterminer les contraintes normales et de cisaillement des intersections de ce nouvel axe avec le cercle.
- Avec le cercle de Mohr on peut déterminer l'état de contraintes complet si deux des informations suivantes sont connues:
  - La contrainte normale maximale
  - La contrainte normale minimale
  - La contrainte de cisaillement maximale
  - La contrainte normale moyenne
  - Contrainte normale et de cisaillement sur un plan
  - Contrainte normale et de cisaillement sur un second plan

# Cercle de Mohr

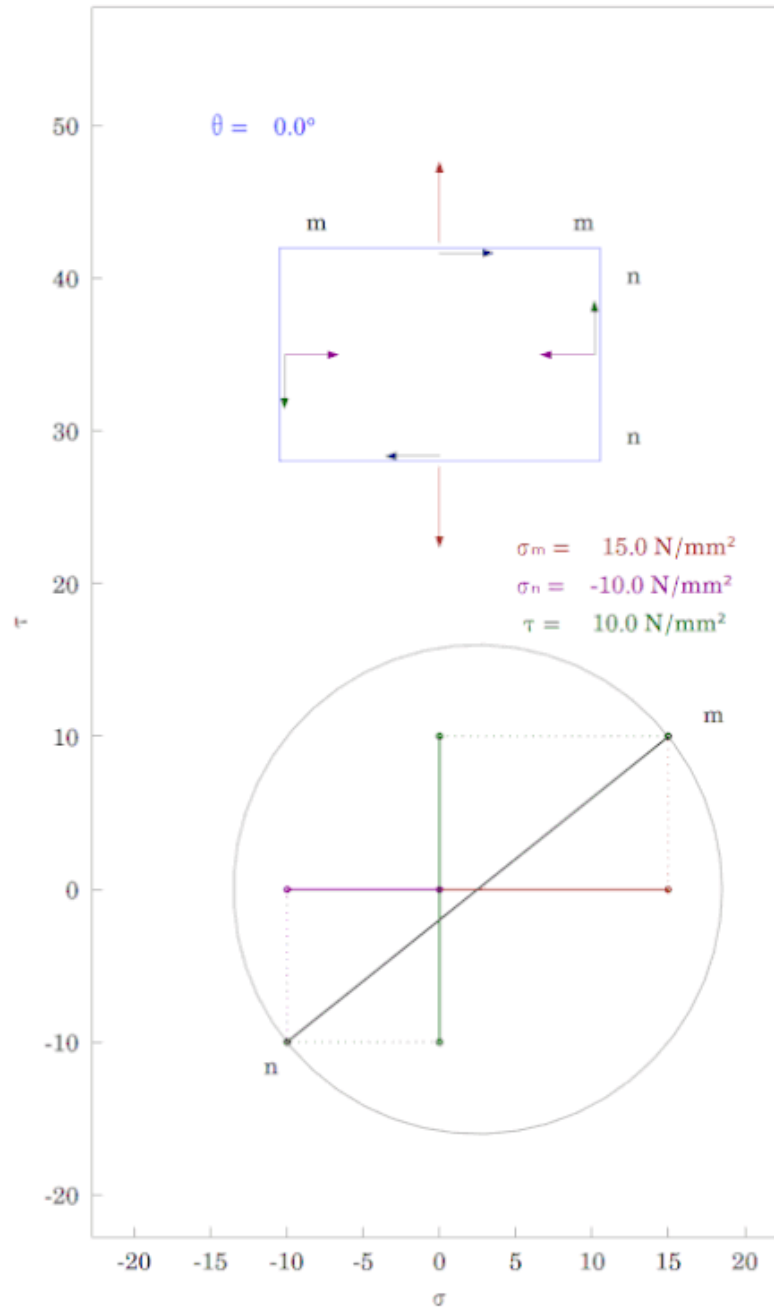
## Cas particuliers



Cercle de Mohr pour un état de contraintes biaxiales. □



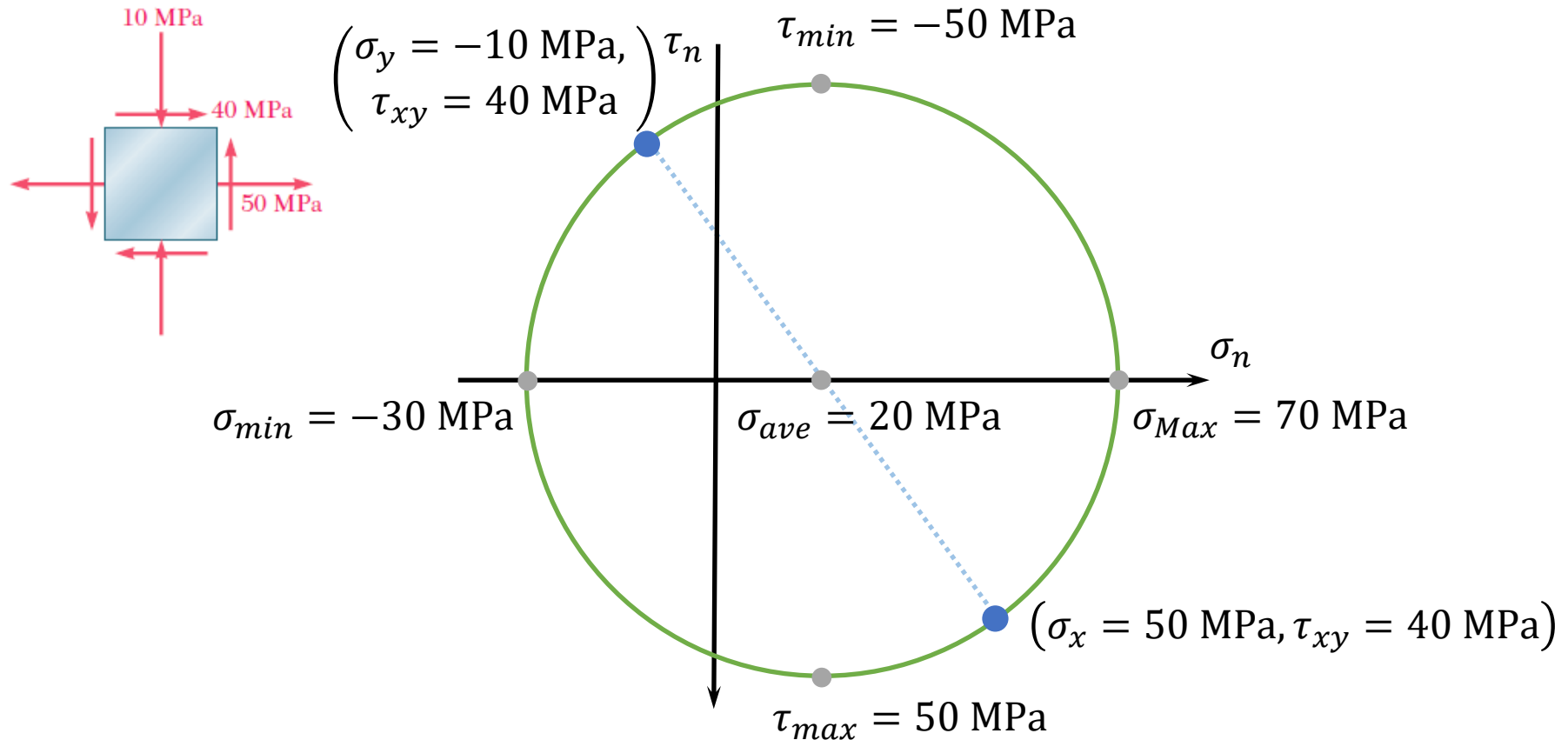
Cercle de Mohr pour du cisaillement pur. □



# Exemple 4.1

## Cercle de Mohr

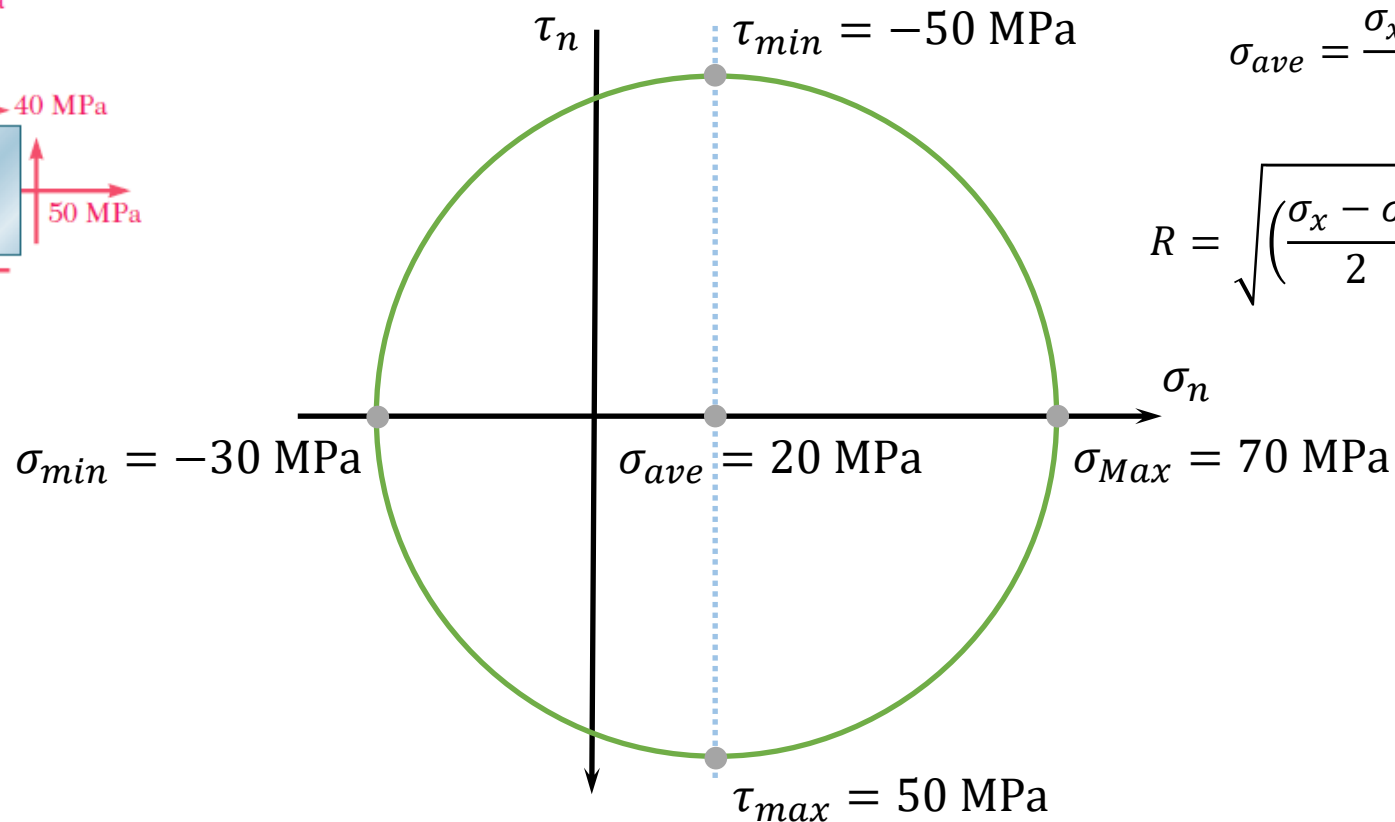
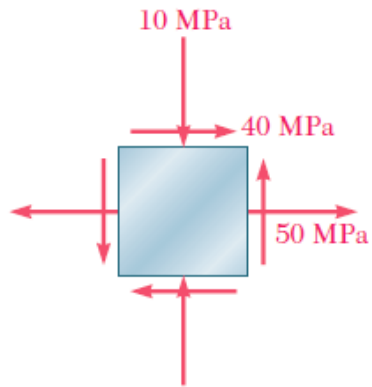
Pour l'état de contraintes dans le plan de la figure, déterminer (a) les plans principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée



# Exemple 4.1

## Cercle de Mohr

Pour l'état de contraintes dans le plan de la figure, déterminer (a) les plans principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée



$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

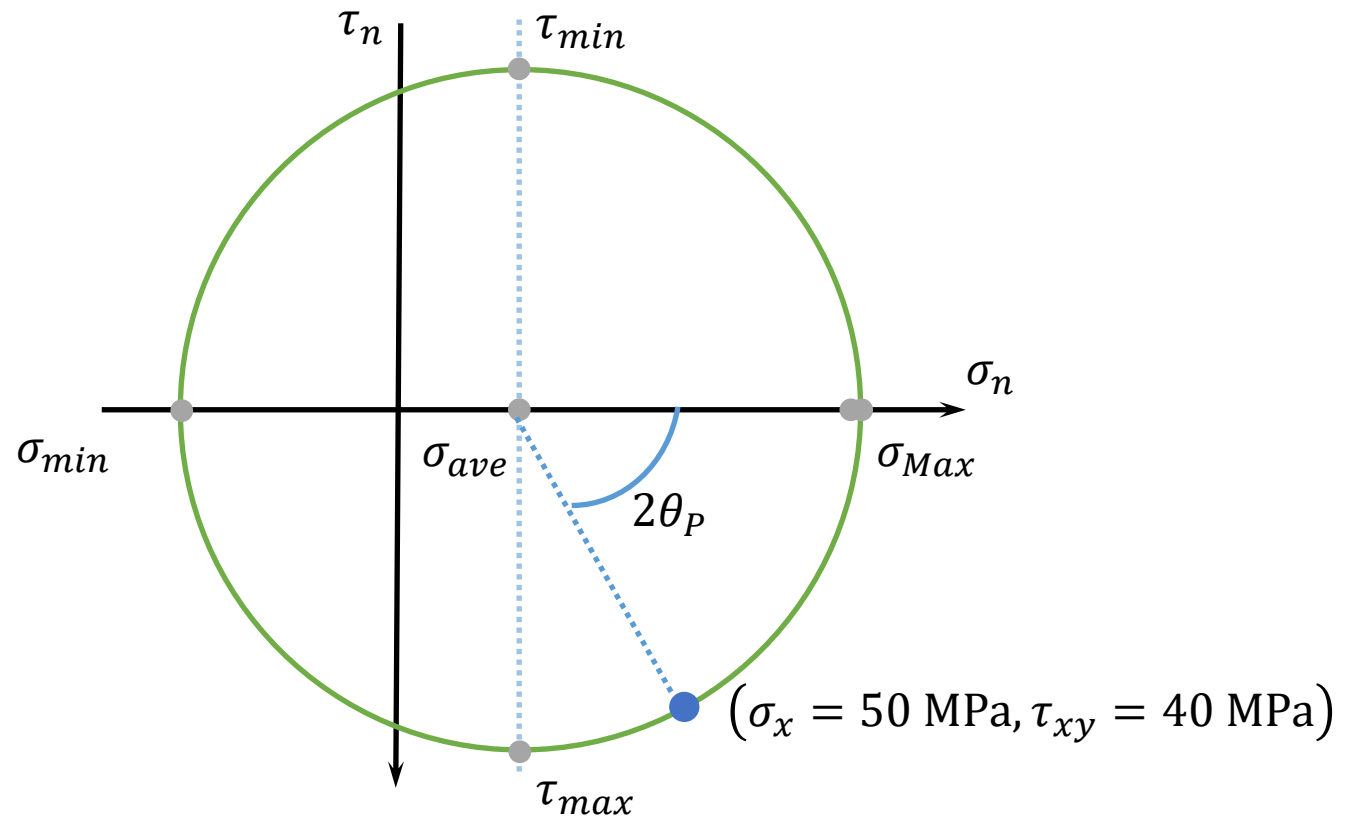
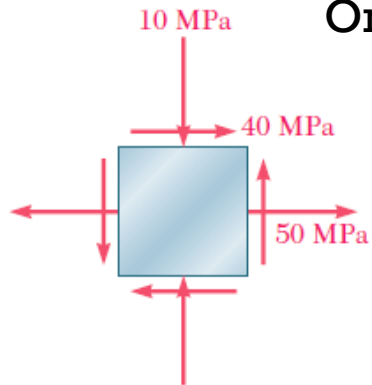
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

# Exemple 4.1

## Cercle de Mohr

Pour l'état de contraintes dans le plan de la figure, déterminer (a) les plans principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée

On peut positionner l'état initial et déterminer l'angle principale



# Cercle de Mohr des contraintes en 2D

## Résumé

	<b>Cercle de Mohr des Contraintes</b>
<b>Centre</b>	$(\sigma_{av}, 0) = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$
<b>Rayon</b>	$R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$
<b>max cisaillement</b>	$(\tau_{xy})_{min}^{max} = \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$
<b>max, min normale</b>	$(\sigma_{x'})_{min}^{max} = \sigma_{1\&2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$

# Transformation de contraintes en 3D

## Axes principaux, contraintes et déformations relatives

- En 3D, nous pouvons toujours diagonaliser les tenseurs de contraintes et de déformations relatives.

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \text{dans les coordonnées} \rightarrow \tilde{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

*principales*

- Les axes de ce système de coordonnées sont les *axes principaux*
- Les éléments sur la diagonale sont les *contraintes principales*
- Quand le tenseur de contraintes est représenté dans son système de coordonnées principales, il n'y a pas de contraintes de cisaillement, que des contraintes normales

# Transformation de contraintes en 3D

## Contraintes de cisaillement maximales

---

- Nous pouvons séparer l'espace 3D en trois plans définis par chaque paire des trois directions principales, ensuite nous obtenons:

$$\tau_{Max,1} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \quad \tau_{Max,2} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad \tau_{Max,3} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

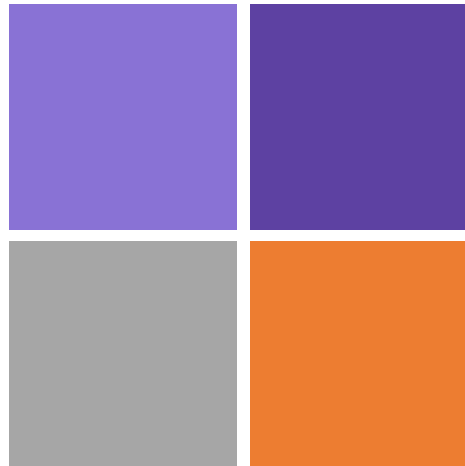
### A RETENIR:

- L'une des trois contraintes principales peut être nulle et encore changer la valeur des contraintes de cisaillement maximales.

# Semaine 4

## Partie III:

# Critères de défaillance



### **Partie III: Critères de défaillance**

1. Facteur de sécurité
2. Contraintes de Von Mises

# Qu'est-ce que la défaillance ?

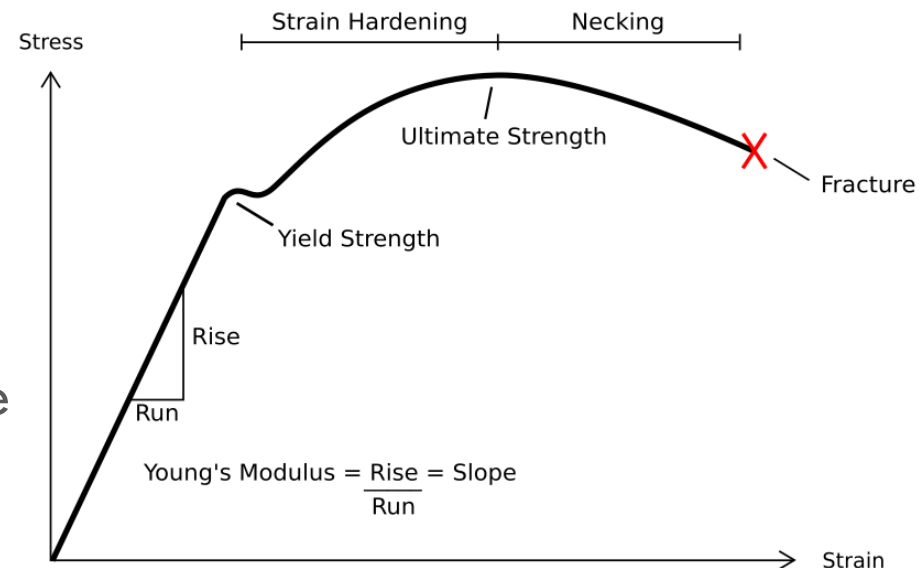
- Défaillance – n'importe quel changement dans les composants d'une structure, d'une machine qui fait qu'elle ne peut remplir sa fonction.

## □ Ductile

- Déformation plastique significative entre la limite d'élasticité (yield) et la fracture
- Défaillance = Yield ou à définir dans le domaine plastique

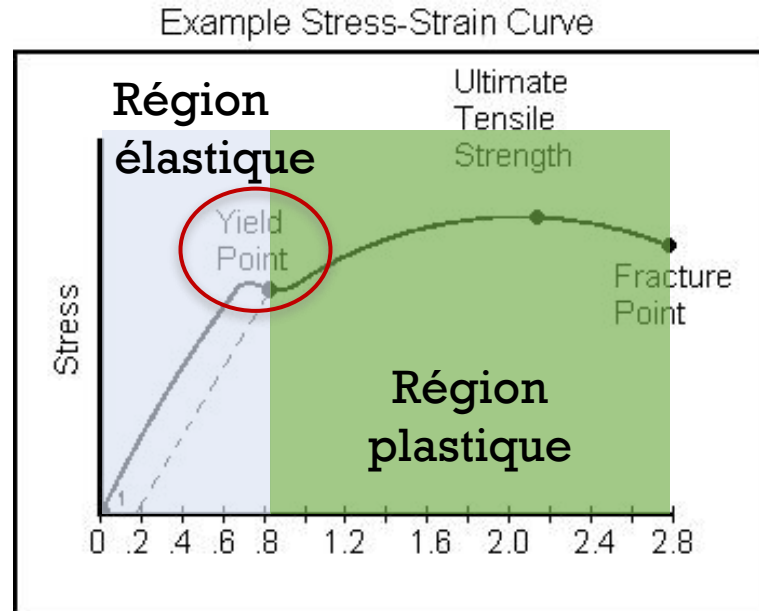
## □ Fragile

- Yield ~ Fracture
- Défaillance = Fracture
- Pourrait aussi être un seuil de déformation relative à ne pas dépasser dans le domaine linéaire



# Critères de défaillance

## Contrainte limite d'élasticité



- Le point de la courbe où la non-linéarité apparaît est la “limite d'élasticité” / “**Contrainte limite d'élasticité**” / “**yield point**”

$$\text{Facteur de sécurité (FS)} = \frac{\text{Contrainte limite d'élasticité}}{\text{Contrainte maximale prévue}}$$

$$FS = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{max}}$$

- Pour un design robuste, le facteur de sécurité doit être  $\geq 2$

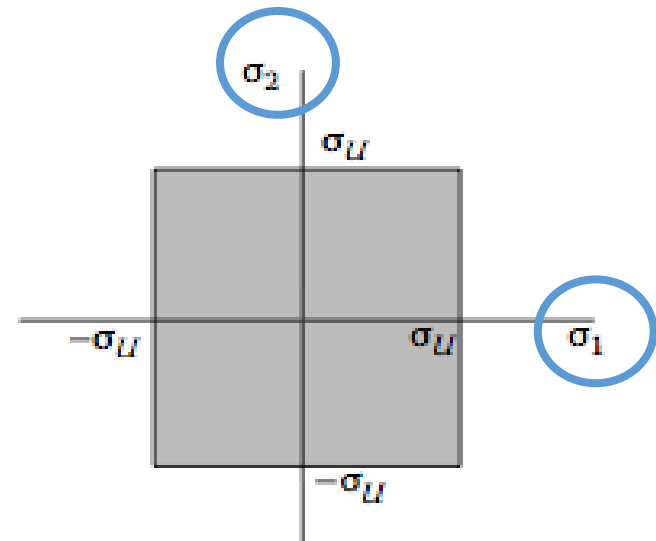
# Critères de défaillance

## Contraintes à la rupture et normale maximale

- Un élément de structure défaille quand la contrainte normale maximale dans l'élément atteint la contrainte à la rupture

$$\text{Max} (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = \sigma_U$$

- Pour un état de contraintes dans le plan, nous pouvons représenter graphiquement le critère de la contrainte normale maximale. Tout état de contrainte dans la partie sombre est sûr



Dans ce cours:  $\sigma_U = \sigma_{yield}$

# Critères de défaillance

## Critère de Von Mises

---

- Ce critère de défaillance pour les matériaux ductiles est dérivé de l'énergie de déformation relative

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \sigma_{VM}^2$$

- Pour déterminer l'état de contrainte pour une analyse de défaillance plus simple, nous pouvons calculer une **contrainte de Von Mises** pour chaque point dans la structure en 3D.

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

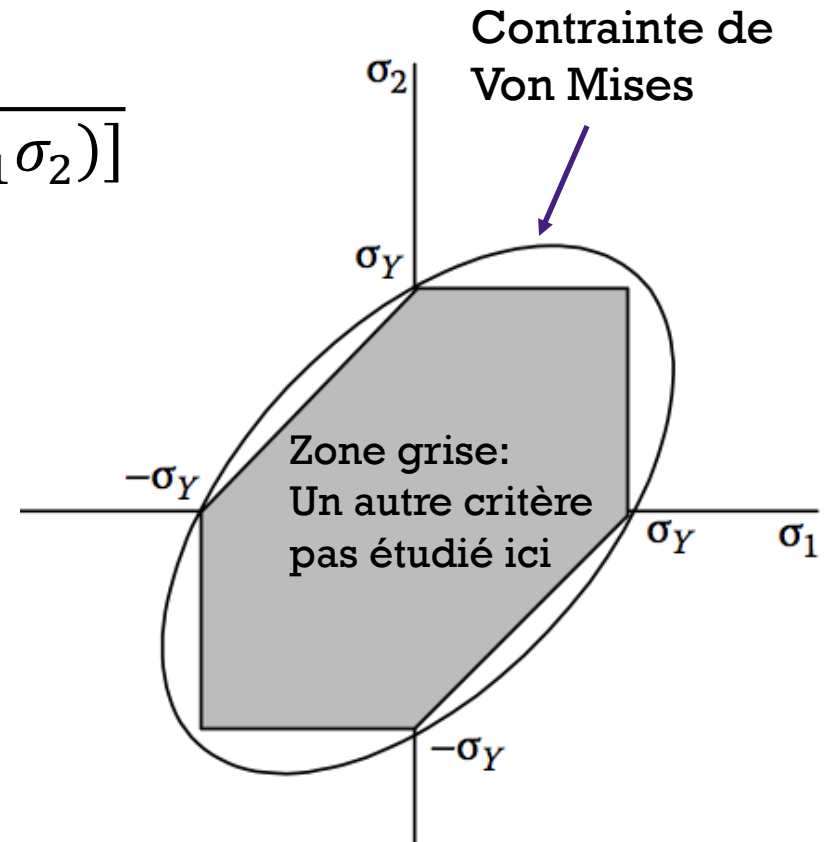
# Critères de défaillance

## Critère de Von Mises

- Pour un état de contrainte dans le plan, la région sûre est définie par une courbe, qui décrit un ellipse

$$\sigma_{VM} = \sqrt{[(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 - (\sigma_1\sigma_2)]}$$

En 2D:  $\sigma_3 = 0$



# Critères de défaillance

## Critère de Von Mises et facteur de sécurité

- Nous pouvons décrire à quel point un matériau dans une structure est sur le point de défaillir en utilisant le facteur de sécurité.
- Pour le facteur de sécurité de Von Mises, nous avons:

$$\text{Facteur de sécurité } (FS_{VM}) = \frac{\text{Contrainte limite d'élasticité}}{\text{Contrainte de Von Mises}}$$

$$FS_{VM} = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{VM}}$$

Pour des structures complexes, nous devrions calculer la contrainte équivalente de Von Mises à tous les points critiques de la structure. Notamment où des concentrations de contrainte risquent de survenir. Les logiciels d'éléments finis (FEM) 3D fournissent directement la contrainte équivalente de Von Mises.

# Contraintes maximales et de limite d'élasticité

- En 2D:  $\sigma_1$  ,  $\sigma_{\max}$  = valeur maximale et  $\sigma_2$  ,  $\sigma_{\min}$  = valeur minimale

par exemple: -10 MPa ( $\sigma_1$ ) est plus grand que -150 MPa ( $\sigma_2$ )

- En 3D:  $\sigma_1$  ,  $\sigma_{\max}$  = valeur maximale

$\sigma_2$  entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ ,

$\sigma_3$  ,  $\sigma_{\min}$  : valeur minimale

- Contrainte limite d'élasticité est considérée comme la même en tension et en compression.

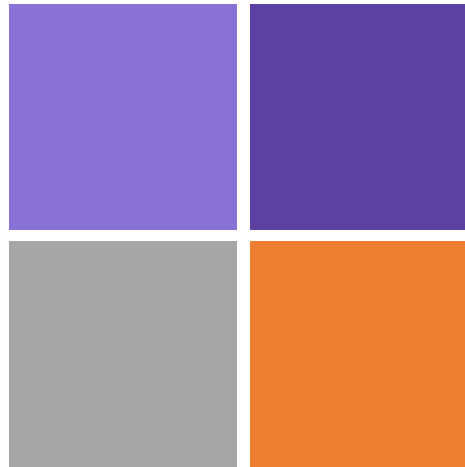
par exemple: avec  $\sigma_{\text{yield}} = 100$  MPa, il y aura défaillance pour:

$\sigma_{\max}$  en traction  $> 100$  MPa et  $\sigma_{\max}$  en compression  $< -100$  MPa

ou  $|\sigma_{\max, \min}|_{\max} > |\sigma_{\text{yield}}|$

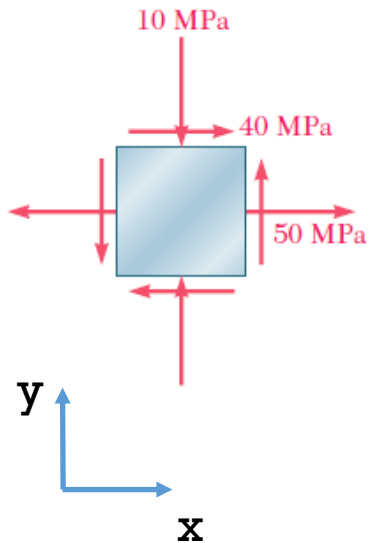
# Transformation des contraintes

## Exemples



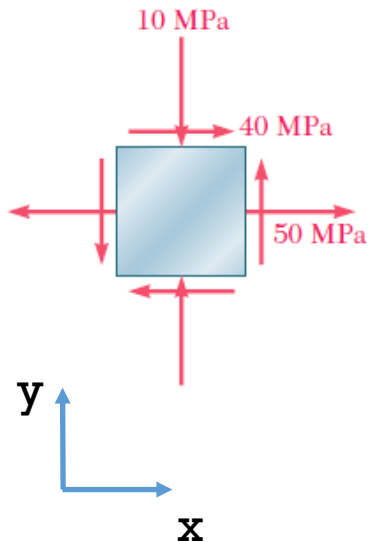
# Exemple 4.2

Pour l'état de contrainte dans le plan montré sur la figure, déterminer (a) les axes principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée.



# Exemple 4.2

Pour l'état de contrainte dans le plan montré sur la figure, déterminer (a) les axes principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée.



Nous écrivons le tenseur de contraintes (attention à l'unité):

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Puis nous calculons les contraintes principales en résolvant:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 - \lambda & 40 \\ 40 & -10 - \lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

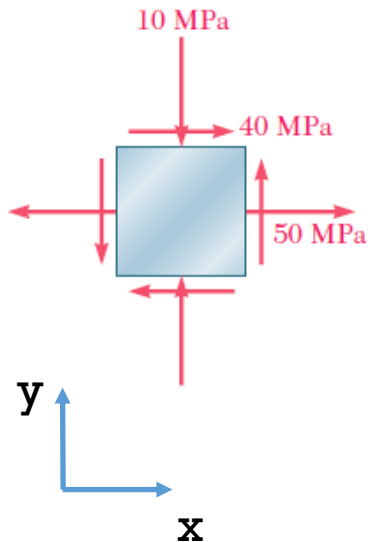
$$\sigma_{Max} = 20 \pm \sqrt{900 + 1600} \text{ MPa} = 20 \pm 50 \text{ MPa}$$

*min*

$$\sigma_{Max} = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.2

Pour l'état de contrainte dans le plan montré sur la figure, déterminer (a) les axes principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée.



Les contraintes principales connues, nous pouvons trouver la direction de l'axe principal:

$$\begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 70 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 50a + 40b = 70a \\ 40a - 10b = 70b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{40}{20}b \\ a = \frac{80}{40}b \end{cases} \rightarrow a = 2b$$

Le premier axe principal est dans la direction du vecteur  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

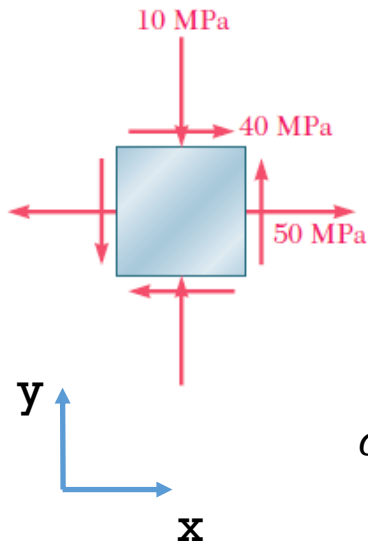
Son angle avec l'axe original est:  $\theta_p = \tan^{-1} 0.5 = 26.56^\circ$

$$t_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2} = \frac{70 - (-30)}{2} = 50 \text{ MPa} \quad \sigma_{\tau max} = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 20 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.2

Pour l'état de contrainte dans le plan montré sur la figure, déterminer (a) les axes principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée.

En travaillant avec les contraintes données pour les axes originaux et les formules suivantes:



$$\sigma_{Max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

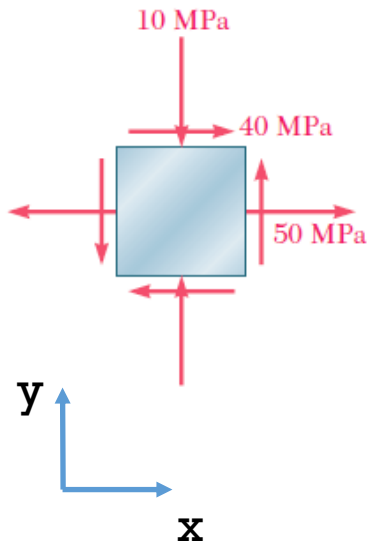
$$\sigma_{Max/min} = \frac{50 - 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + 40^2} = 20 \pm 50 = 70 \text{ \& } -30 \text{ MPa}$$

$$t_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{50 - (-10)}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\tau max} = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.2

Pour l'état de contrainte dans le plan montré sur la figure, déterminer (a) les axes principaux, (b) les contraintes principales, (c) la contrainte de cisaillement maximale et la contrainte normale associée.



En travaillant avec les contraintes données pour les axes originaux et les formules suivantes:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

A  $\theta_p$ , sur les plans des axes principaux,  $\tau_{x'y'} = 0$

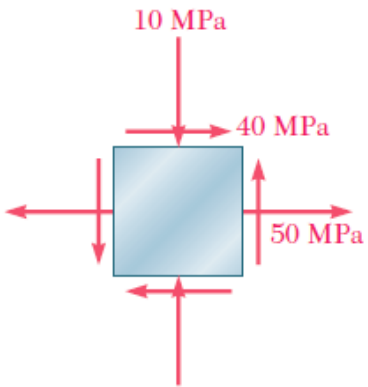
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Son angle avec l'axe original est:  $\theta_p = 26.56^\circ$

$$\theta_{cis\ max,min} = \theta_p \pm 45^\circ = 26.56^\circ \pm 45^\circ$$

# Exemple 4.2

Considérons le maintenant en 3D



$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 40 \\ 40 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 - \lambda & 40 \\ 40 & -10 - \lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

Nous analysons maintenant le tenseur 3x3:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 0 \\ 40 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa} \rightarrow \begin{vmatrix} 50 - \lambda & 40 & 0 \\ 40 & -10 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

Nous notons que le polynôme de 3eme degré a une racine nulle.

$$\begin{vmatrix} 50 - \lambda & 40 & 0 \\ 40 & -10 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0 = \lambda \begin{vmatrix} 50 - \lambda & 40 \\ 40 & -10 - \lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}$$

$$t_{max,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{70 - (-30)}{2} = 50 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.3

Même question pour un autre cas

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 30 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 - \lambda & -20 \\ -20 & 30 - \lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 10 \text{ MPa} \quad t_{max} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Si nous analysons le tenseur 3x3:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa} \rightarrow \begin{vmatrix} 30 - \lambda & -20 & 0 \\ -20 & 30 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \text{ MPa} = 0$$

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$$

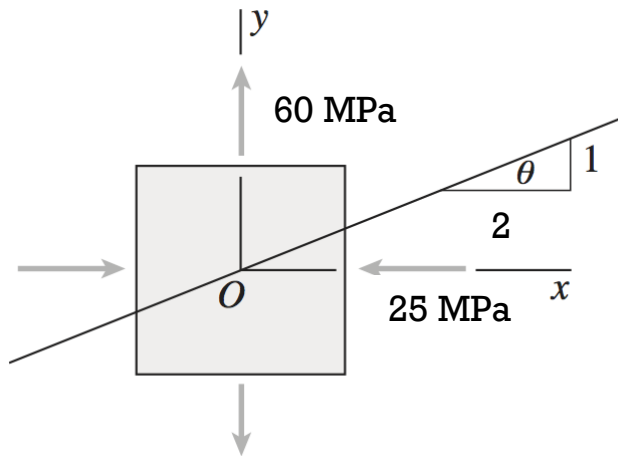
$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$t_{\max 1,2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa} \quad t_{\max 2,3} = \frac{10 - 0}{2} = 5 \text{ MPa}$$

$$t_{\max 1,3} = \frac{50 - 0}{2} = 25 \text{ MPa}$$

Pour ce cas particulier, la contrainte de cisaillement en 3D > qu'en 2D.

# Exemple 4.4



Un élément sous contrainte biaxiale est soumis à des contraintes:

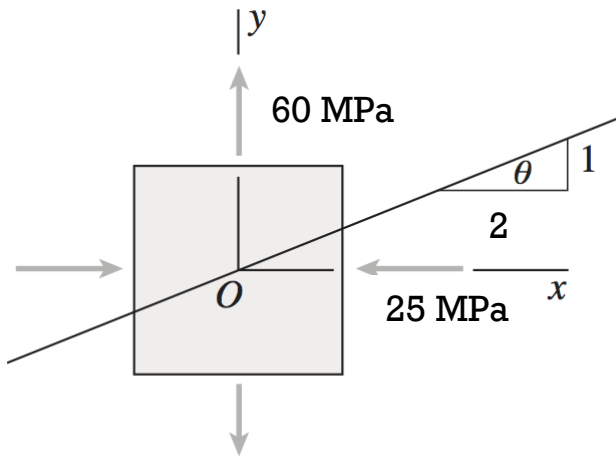
$$\sigma_x = -25 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_y = 60 \text{ MPa}$$

Déterminer:

- Les contraintes et les axes principaux
- Les contraintes de cisaillement maximales et les contraintes normales associées
- La contrainte agissant sur un élément orienté avec un angle  $\theta$  (voir la Figure)

# Exemple 4.4

## a) Les contraintes et les axes principaux



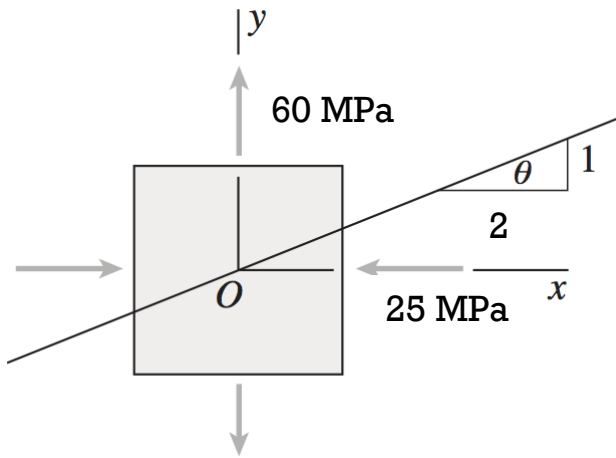
Selon l'état original, il n'y a pas de contraintes de cisaillement, ce qui signifie que les axes originaux sont directement les axes principaux. Et que les contraintes normales originales sont déjà les contraintes principales:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$\sigma_1 = 60 \text{ MPa} \quad \& \quad \sigma_2 = -25 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.4

b) Contraintes de cisaillement maximales et les contraintes normales associées



$$\tau_{Max/min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{Max/min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{85}{2} \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

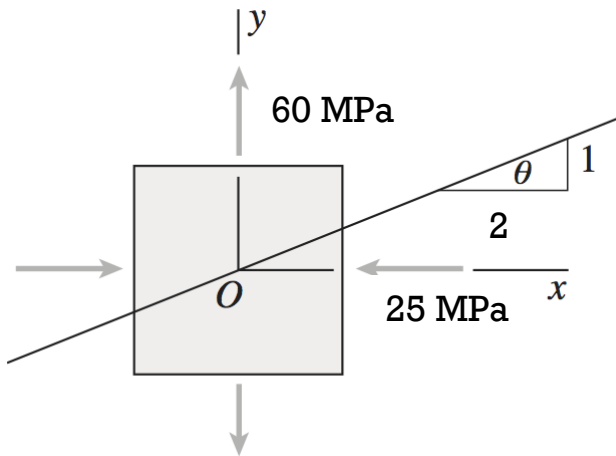
maximum pour  $\theta = 45^\circ$

Contraintes normales associées:

$$\sigma_{x'} = \sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ at } 45^\circ$$

# Exemple 4.4

c) Les contraintes agissant sur un élément orienté avec un angle  $\theta$



$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sigma_{y'} &= \sigma_y \cos^2(\theta) + \sigma_x \sin^2(\theta) - 2\tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\end{aligned}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{4}{5}; \sin^2(\theta) = \frac{1}{5}; \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{2}{5}$$

$$\sigma_{x'} = -25 \frac{4}{5} + 60 \frac{1}{5} = 32 \text{ MPa}$$

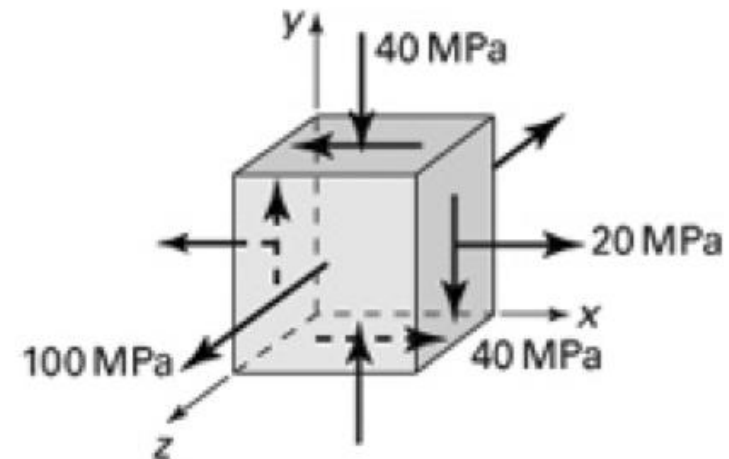
$$\sigma_{y'} = 60 \frac{4}{5} - 25 \frac{1}{5} = 53 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = 85 \frac{2}{5} = 14 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.5

L'état de contrainte d'un élément d'une structure est illustré sur la figure suivante.

- Déterminer les contraintes principales et les axes principaux
- Calculer la contrainte équivalente de Von Mises



# Exemple 4.5

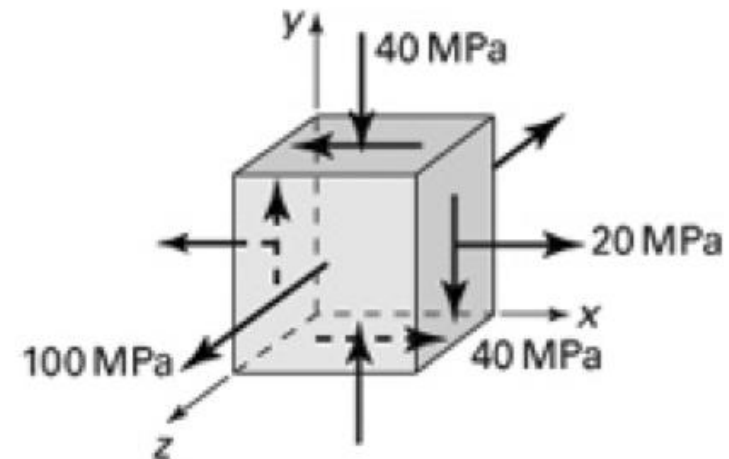
a) Déterminer les contraintes et les axes principaux

Pour un problème en 3D, nous pouvons calculer les contraintes principales de la même manière: en construisant le tenseur et en résolvant l'équation pour le déterminant:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 20 & -40 & 0 \\ -40 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 20 - \lambda & -40 & 0 \\ -40 & -40 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 100 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (100 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 20 - \lambda & -40 \\ -40 & -40 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa} \quad \& \quad \sigma_2 = 40 \text{ MPa} \quad \& \quad \sigma_3 = -60 \text{ MPa}$$



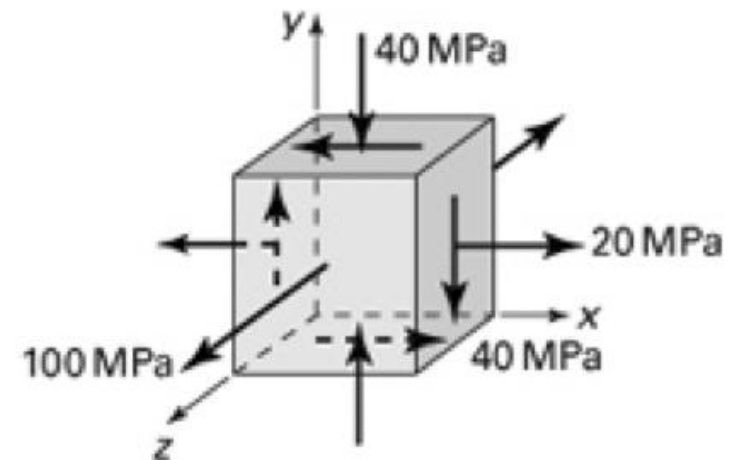
# Exemple 4.5

b) Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}$$

avec  $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$  &  $\sigma_2 = 40 \text{ MPa}$  &  $\sigma_3 = -60 \text{ MPa}$

$$\sigma_{VM} = 140 \text{ MPa}$$



# Exemple 4.6

Pour élément dans un état de contraintes dans le plan et soumis aux contraintes suivantes:

$$\sigma_x = -25 \text{ MPa}, \sigma_y = -25 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 20 \text{ MPa}, \text{ et } \sigma_{yield} = 100 \text{ MPa}$$

- a) Déterminer les contraintes principales
- b) Calculer la contrainte équivalente de Von Mises
- c) Calculer le facteur de sécurité, lié au critère de la Contrainte maximale,  $FS$ , et au critère de la Contrainte de Von Mises,  $FS_{VM}$

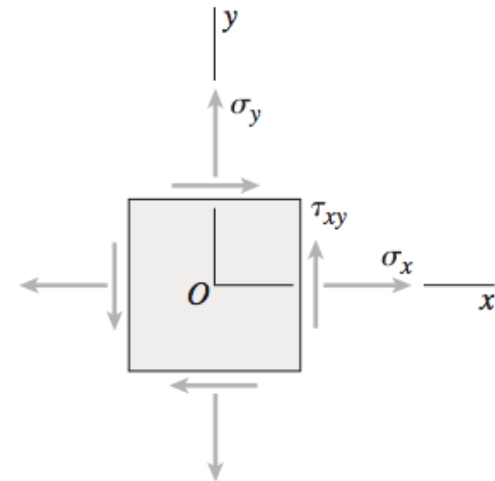
# Exemple 4.6

Pour élément dans un état de contraintes dans le plan et soumis aux contraintes suivantes:

$$\sigma_x = -25 \text{ MPa}, \sigma_y = -25 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 30 \text{ MPa}, \text{ et } \sigma_{yield} = 100 \text{ MPa}$$

a) Déterminer les contraintes principales

$$\sigma_{Max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_{Max/min} = \frac{-25-25}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-25+25}{2}\right)^2 + 30^2} = -25 \pm 30 = 5 \text{ MPa} \text{ \& } -55 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.6

d) Calculer la contrainte équivalente de Von Mises

Pour élément dans un état de contraintes dans le plan et soumis aux contraintes suivantes:

$$\sigma_x = -25 \text{ MPa}, \sigma_y = -25 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 30 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_{yield} = 120 \text{ MPa}$$

b) Calculer la contrainte équivalente de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 + (-\sigma_2)^2} \quad \sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}$$

$$\sigma_{VM\_2D} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma_1 = 5 \text{ MPa} \text{ \& } \sigma_2 = -55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{5^2 - 5 * -55 + 55^2} = \sqrt{2025 - 225 + 25} \quad \sigma_{VM} = 52.7 \text{ MPa}$$

# Exemple 4.6

Pour élément dans un état de contraintes dans le plan et soumis aux contraintes suivantes:

$$\sigma_x = 25 \text{ MPa}, \sigma_y = 25 \text{ MPa} \text{ and } \tau_{xy} = 20 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_{yield} = 120 \text{ MPa}$$

c) Calculer le facteur de sécurité, lié au critère de la Contrainte maximale,  $SF$ , et au critère de la Contrainte de Von Mises,  $SF_{VM}$

$$SF = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{max}}$$

$$|\sigma_{\max, \min}|_{\max} = |-55| \text{ MPa}$$

$$SF = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{max}} = \frac{120}{55} = 2.22$$

$$SF_{VM} = \frac{\sigma_{yield}}{\sigma_{VM}}$$

$$\sigma_{VM} = 52.7 \text{ MPa}$$

$$SF_{VM} = \frac{120}{52.7} = 2.27$$